

MATE1105 - ÁLGEBRA LINEAL 1 - PARCIAL 1

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Este es un examen individual, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Tiempo máximo 1 hora y 20 minutos.

Ejercicio 1. Un empresario tiene tres fábricas: una en Bogotá, una en Medellín y otra en Cali. En cada día trabajado, las empresas usan agua, luz y gas. El agua cuesta 30 pesos por día en Bogotá, 20 pesos por día en Medellín y 20 por día pesos en Cali. La luz cuesta 20 pesos por día en Bogotá, 30 pesos por día en Medellín y 20 pesos por día en Cali. De gas cuesta 10 pesos por día en cada empresa. Los registros indican que en agua ha gastado un total de 340 pesos, de luz 320 pesos y en gas 140 pesos.

- (i) (2pts) Escriba un sistema de ecuaciones lineales que describa la situación anterior.
- (ii) (10 pts) Calcule el número de días trabajados en cada una de las empresas o muestre que los registros son incorrectos debido a que las cantidades gastadas no son compatibles con los costos.

Ejercicio 2. Considere las matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

- (1) Calcule B^{-1} .
- (2) Calcule $\det(B^2C^{-1})$.

Ejercicio 3. En el siguiente sistema de ecuaciones lineales en variables x, y, z

$$\begin{aligned} 2x - y - kz &= 0 \\ x - y - 2z &= 1 \\ -x + 2z &= k \end{aligned}$$

determine para qué valores de k el sistema:

- (a) No tiene solución.
- (b) Tiene un número infinito de soluciones.
- (c) Tiene solución única.

Ejercicio 4. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- (1) La matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

es su propia inversa.

- (2) Existe más de un valor de t tal que los vectores $(1, -t)$ y $(4, t)$ sean ortogonales.
- (3) Existen matrices A y B de 2×2 tales que $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.
- (4) Existen matrices C y D de 2×2 tales que $\det(C + D) = \det(C) + \det(D)$.
- (5) Para los puntos $P = (2, 3)$, $Q = (5, 2)$, $R = (2, 25)$ y $S = (1, 22)$ vale que $\text{Proy}_{\vec{PQ}}(\vec{RS}) = (-1, 12)$.

Ejercicio extra. (2 pts) Una matriz A de $n \times n$ se llama *simétrica* si $A = A^T$. Demuestre que para cualquier matriz A (de cualquier tamaño) la matriz producto AA^T está definida y es una matriz simétrica.