Matemáticas 1105, 2023 Semestre II
Examen Parcial 1
14 de septiembre, 2023

Duración del examen: 80 minutos

NOMBRE: **CÓDIGO:**

NOMBRE DE SU PROPFESOR DE COMPLEMENTARIA (Julián Calderón, Jacinto Puig, o Juan José Villamarín):

Por favor escriba sus respuestas en una hoja aparte, pero entregue la hoja de los enunciados con la hoja con sus respuestas.

Puntos importantes:

1. Este es un examen individual, y no se permite discutir los problemas con nadie durante la duración del examen (excepto para pedir aclaraciones del profesor o de los asistentes).
2. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: ni notas, ni calculadoras, ni cuadernos, ni aparatos electrónicos, ni teléfonos celulares.
3. Todo aparato delectrónico debe permanecer en silencio durante el examen, y sólo se puede utilizar en casos de urgencia.
4. Respete el juramento uniandino: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad".
5. Antes de las 12:30 p.m. no se permite voltear esta hoja ni empezar a escribir respuestas.
6. Si no justifique claramente sus respuestas, podríamos bajarle puntos en la calificación.

Temas tratados: sólo los temas de las secciónes 1.1-1.2, 2.1-2.7, 3.1-3.5, y 3.7-3.8 del texto de M. Winklmeier.

¡Éxito!

1. (15 puntos) Abajo se muestran varios sistemas lineales. Para cada sistema, (i) póngale en forma escalonada **reducida**, luego (ii) diga si tiene **solución única, infinitas soluciones, o ninguna solución (si es inconsistente)**, y finalmente (iii) en caso que no es consistente, escriba una solución concreta (escogiendo valores para las variables libres).

   (a)
$$2x + 3y = 6$$
$$3x + y = -5$$

   (b)
$$x + z = 0$$
$$y + 2z = 0$$
$$3x + 2y + 7z = 1$$

   (c)
$$3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 12x_4 = 3$$
$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 = 1$$

2. (10 puntos)

   (a) Halle **dos** vectores distintos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que (i) ambos son ortogonales (perpendiculares) a $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, y además (ii) ambos tienen longitud 1 (es decir, $\|\vec{v}_1\| = 1$ y $\|\vec{v}_2\| = 2$).
   Puede dejar su respuesta expresada en términos de raíces cuadradas.

   (b) Sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Diga si la cantidad de vectores $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ es finita o infinita, y explique claramente por qué.

3. (12 puntos)

   (a) Sea π el plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los tres puntos $(1, 3, 3)$, $(2, 3, 5)$, y $(1, 6, 3)$. Halle una ecuación de la forma
$$ax + by + cz = d$$
   para el plano π.

   (b) Ahora sea L la línea que es la intersección del plano π arriba y el plano dado por la ecuación $z = 0$. Halle ecuaciones paramétricas para L.

4. (13 puntos) Para todos los incisos abajo, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule la traspuesta A^T de A.

(b) Halle un vector $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) ¿Es la matriz A invertible o not? (Pista: no tiene que calcular A^{-1}, si existe. Si hizo bien el inciso (b), la respuesta debería salir rápidamentne.)

(d) Ahora considere el sistema **homogéneo** que corresponde a

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Este sistema tiene solución **única**, o tiene infinitas soluciones? Explique.

BONO (4 puntos): Sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Halle un vector $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que (i)

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y además (ii) $\|\vec{v}\| = \sqrt{26}$.