Matemáticas 1105, 2023 Semestre II
Examen Parcial 1
SOLUCIÓN

1. (15 puntos) Abajo se muestran varios sistemas lineales. Para cada sistema, (i) póngale en forma escalonada **reducida**, luego (ii) diga si tiene **solución única, infinitas soluciones, o ninguna solución (si es inconsistente)**, y finalmente (iii) en caso que no es consistente, escriba una solución concreta (escogiendo valores para las variables libres).

   (a)
$$2x + 3y = 6$$
$$3x + y = -5$$

   SOLUCIÓN: Ponemos el sistema en forma de matriz aumentada, y lo reducimos por operaciones elementales en filas, así:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{array}\right) \qquad (R1 \to \frac{1}{2}R1)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3 \\ 0 & -7/2 & -14 \end{array}\right) \qquad (R2 \to R2 - 3R1)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad (R2 \to -\frac{2}{7}R2)$$

$$\to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \qquad (R1 \to R1 - \frac{3}{2}R2).$$

   El sistema es consistente porque en su forma escalonada reducida no tiene ninguna fila "$0\,0\,|\,1$". Cada columna al lado izquierdo tiene un pivote, así que **no** hay variables libres en la solución, y tiene solución única.
   La solución única del sistema es $x = -3, y = 4$.

   (b)
$$x + z = 0$$
$$y + 2z = 0$$
$$3x + 2y + 7z = 1$$

   SOLUCIÓN: Ponemos el sistema en forma de matriz aumentada, y lo reducimos por operaciones elementales en filas, así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \qquad (R3 \to R3 - 3R1)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (R3 \to R3 - 2R2).$$

Este sistema es inconsistente porque su última fila es "$0\,0\,0\,0\,|\,1$", lo cual da la ecuación $0 = 1$, que es imposible. Es decir, este sistema no tiene ninguna solución.

(c)

$$3x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 12x_4 = 3$$
$$2x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 11x_4 = 1$$

SOLUCIÓN: Ponemos el sistema en forma de matriz aumentada, y lo reducimos por operaciones elementales en filas, así:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 9 & 3 & 12 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 11 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 11 & 1 \end{array}\right) \qquad (R1 \to \frac{1}{3}R1)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \qquad (R2 \to R2 - 2R1)$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \qquad (R1 \to R1 - R2).$$

El sistema es consistente porque no tiene ninguna fila de la forma "$0\,0\,0\,0\,|\,1$" en su forma escalonada reducida. Las columnas 2 y 4 no tienen pivotes, así que x_2 y x_4 son variables libres en la solución, y el sistema tiene infinitas soluciones.

La solución general se da por las ecuaciones

$$x_1 = 2 - 3x_2 - x_4,$$
$$x_3 = -1 - 3x_4,$$

y las variables libres x_2, x_4 se pueden tomar cualquier par de valores.

Se puede hallar una solución concreta al sistema escogiendo (por ejemplo) los valores $x_2 = 0$ y $x_4 = 0$ para las variables libres, dando:

$$x_1 = 2,\; x_2 = 0,\; x_3 = -1,\; x_4 = 0.$$

2. (a) (5 puntos) Halle **dos** vectores distintos $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que (i) ambos son ortogonales (perpendiculares) a $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, y además (ii) ambos tienen longitud 1 (es decir, $\|\vec{v}_1\| = 1$ y $\|\vec{v}_2\| = 1$).
Puede dejar su respuesta expresada en términos de raíces cuadradas.

SOLUCIÓN: Si

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

entonces $\vec{v}$ es perpendicular al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ justo en caso que su producto punto con él es igual a 0, es decir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

Esto es equivalente a

$$3x - 2y = 0 \tag{2}$$

o

$$x = \frac{2}{3}y. \tag{3}$$

Ahora la longitud de un vector $\vec{v}$ satisfaciendo esta condición es

$$\|\vec{v}\| = \| \begin{pmatrix} \frac{2}{3}y \\ y \end{pmatrix} \| = \sqrt{\frac{4}{9}y^2 + y^2} = \sqrt{\frac{13}{9}y^2}. \tag{4}$$

Para que esto sea igual a 1, necesitamos que

$$1 = \sqrt{\frac{13}{9}y^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}|y|, \tag{5}$$

es decir que

$$|y| = \frac{3}{\sqrt{13}} \tag{6}$$

o

$$y = \pm\frac{3}{\sqrt{13}}. \tag{7}$$

Las ecuaciones (3) y (7) dan las dos posibles vectores

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \tag{8}$$

y

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}} \\ -\frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

(b) (5 puntos) Sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Diga si la cantidad de vectores $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ es finita o infinita, y explique claramente por qué.

SOLUCIÓN: Si

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

entonces $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$ justo en caso que

$$x + 2y + 3z = 0.$$

Esta ecuación se puede considerar como un sistema homogéneo 1×3 (de una sola ecuación y 3 variables). Ya está en forma escalonada, con variables libres y y z, así que podemos escoger cualesquier par de valores para y, z y poner

$$x = -2y - 3z$$

para generar soluciones a la ecuación.

Dado que hay infinitos valores posibles para y y z, hay **infinitas vectores $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0$.**

3. (a) (8 puntos) Sea π el plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los tres puntos $(1,3,3)$, $(2,3,5)$, y $(1,6,3)$. Halle una ecuación de la forma

$$ax + by + cz = d$$

para el plano π.

SOLUCIÓN: Recuerde que un vector normal $\vec{n}$ al plano π se forma por los coeficientes a, b, c de la ecuación, así:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Podemos hallar un vector $\vec{n}$ perpendicular a π tomando el producto cruz de dos vectores paralelos al plano, como

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-3 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

y

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 6-3 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Ahora sea

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ 0-0 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Por lo tanto, una ecuación para el plano π es

$$-6x + 3z = d. \tag{14}$$

Ahora se puede determinar el valor de d usando cualquier de los tres puntos dados en el enunciado, por ejemplo $(1,3,3)$: la ecuación (14) tiene que cumplirse cuando $x = 1$, $y = 3$, y $z = 3$, dando

$$d = -6 + 3 \cdot 3 = 3$$

y una ecuación para π es

$$-6x + 3z = 3.$$

Hay otra versión de este examen en donde el plano π pasa por los tres puntos $(1,3,1), (3,3,2)$, y $(1,0,1)$. En este caso un vector normal $\vec{n}$ se da por

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dando

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 0-0 \\ 2\cdot(-3)-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, en esta versión el plano π se da por

$$3x - 6z = d,$$

y utilizando el punto $(1,3,1)$, con $x = 1, y = 3$, y $z = 1$, concluimos que

$$d = 3 \cdot 1 - 6 \cdot 1 = -3$$

y el plano se da por

$$3x - 6z = -3. \tag{15}$$

(b) (4 puntos) Ahora sea L la línea que es la intersección del plano π arriba y el plano dado por la ecuación $z = 0$. Halle ecuaciones paramétricas para L.

SOLUCIÓN: En la ecuación (15) arriba para el plano π, podemos reemplazar z por 0 para concluir que los puntos de L satisfacen la ecuación $3x = -3$, es decir:

$$x = -1. \tag{16}$$

Entonces los puntos de la recta L satisfacen que $z = 0$, $x = -1$, y no hay ninguna restricción sobre el valor de la variable y. Por lo tanto, ecuaciones paramétricas para L son:

$$x = -1, \;\; y = t, \;\; z = 0$$

donde la variable t es un parámetro libre (puede ser cualquier número real).

4. Para todos los incisos abajo, sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (2 puntos) Calcule la traspuesta A^T de A.

SOLUCIÓN:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (6 puntos) Halle un vector $\vec{x}$ en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN: Esto es equivalente a hallar una solución $\vec{x}$ a un sistema lineal 3×3, porque si $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, entonces

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \\ (-1) \cdot x_1 + (-3) \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \end{pmatrix},$$

así que la ecuación en el enunciado es equivalente a un sistema lineal con matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ -1 & -3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Por el Método Gauss-Jordan, esta matriz se reduce así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ -1 & -3 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \qquad (R3 \to R3{+}R1)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & | & -5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \qquad (R1 \to R1 - 3R2)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \qquad (R1 \to R1 + 5R3, R2 \to R2 - 2R3).$$

Por lo tanto, una solución (de hecho, la **única** solución) es

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En la otra versión del examen parcial, había otra matriz A y otro vector, dando el sistema lineal con matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 3 & | & 1 \\ -1 & -2 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}.$$

En esta versión del examen, la única solución posible para $\vec{x}$ es

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) (3 puntos) ¿Es la matriz A invertible o no?

SOLUCiÓN: Sí, la matriz A es invertible. La razón es porque en su forma escalonada tiene 3 pivotes, uno en cada columna, como ya se demostró en la solución al inciso (b) justo arriba.

(d) (2 puntos) Ahora considere el sistema **homogéneo** que corresponde a

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Este sistema tiene solución **única**, o tiene infinitas soluciones? Explique.

SOLUCIÓN: Este sistema homogéneo tiene solución única, la solución trivial

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La razón por lo cual no tiene infinitas soluciones es porque en su forma escalonada, hay un pivote en cada columna de variable, así que no hay variables libres. O utilizando la existencia de la inversa A^{-1} del punto anterior, se puede ver que

$$A \cdot \vec{x} = \vec{0} \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{0}$$

$$\Rightarrow I_n \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}.$$

BONO (4 puntos): Sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Halle un vector $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ tal que (i)

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

y además (ii) $\|\vec{v}\| = \sqrt{26}$.