

Álgebra Lineal 2016-1

Quiz 1, 19 de agosto 2016

1	2	Σ

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Problem 1. Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

- (a) Encuentre $\text{proy}_{\vec{w}} \vec{u}$.
- (b) Encuentre $\text{proy}_{\vec{w}} \vec{w}$.
- (c) Encuentre un vector \vec{a} tal que $\|\text{proy}_{\vec{w}} \vec{a}\| = 7$.

Problem 2. Considere los planos $E_1 : x + y - 5z = 10$, $E_2 : 2x - 3y + 15z = 30$ y la recta $L : x = 4t$, $y = -3 + 2t$, $z = 1$.

- (a) Encuentre $E_1 \cap E_2$.
- (b) Encuentre $E_1 \cap E_2 \cap L$.
- (c) Encuentre un plano F paralelo al plano E_2 que pasa por el punto $Q(-3, 1, 5)$.

Álgebra Lineal 2016-1

1	2	Σ

Quiz 1, 19 de agosto 2016

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Problem 1. Sean $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Encuentre $\text{proy}_{\vec{w}} \vec{u}$.
- (b) Encuentre $\text{proy}_{\vec{w}} \vec{w}$.
- (c) Encuentre un vector \vec{a} tal que $\|\text{proy}_{\vec{w}} \vec{a}\| = 5$.

Problem 2. Considere los planos $E_1 : x + y - 5z = 10$, $E_2 : 2x - 3y + 15z = 30$ y la recta $L : x = 4t$, $y = -3 + 2t$, $z = 1$.

- (a) Encuentre $E_1 \cap E_2$.
- (b) Encuentre $E_1 \cap E_2 \cap L$.
- (c) Encuentre un plano F paralelo al plano E_1 que pasa por el punto $Q(3, 4, 5)$.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 2, 16 de septiembre 2016

1	2	3	Σ

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Problem 1. Calcule A^{-1} y BA^{-1} donde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 2. Calcule $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Problem 3. ¿Las siguientes matrices se dejan escribir como producto de matrices elementales? Pruebe su respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Álgebra Lineal 2016-2

1	2	3	Σ

Quiz 2, 16 de septiembre 2016

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Problem 1. Calcule A^{-1} y $A^{-1}B$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problem 2. Calcule $\det \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problem 3. ¿Las siguientes matrices se dejan escribir como producto de matrices elementales? Pruebe su respuesta.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 3, 21 de octubre de 2016

1a	1b	1c	2	Σ

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Problem 1. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes?
- (b) Determine si $\vec{v}_4 \in \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$.
- (c) Encuentre $\dim(\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\})$.

Problem 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcule $\ker A$.
- (b) Calcule $\dim(\ker A)$.

Álgebra Lineal 2016-2

1a	1b	1c	2	Σ

Quiz 3, 21 de octubre de 2016

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Problem 1. Sean $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

- (a) v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes?
- (b) Determine si $\vec{v}_4 \in \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$.
- (c) Encuentre $\dim(\text{gen}\{v_1, v_2, v_3\})$.

Problem 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcule $\ker A$.
- (b) Calcule $\dim(\ker A)$.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. Sea V un espacio vectorial con producto interno y $U \subset V$ un subespacio. Sea P la proyección ortogonal sobre U . Calcule los autovalores, el kernel y la imagen de P .

Hint. Considere $U = \{0\}$ y $U = V$ como casos especiales.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. Sea V un espacio vectorial y $U \subset V$ un subespacio. Demuestre que existe una función lineal $T : V \rightarrow V$ tal que $\ker T = U$.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $T : V \rightarrow V$ una función lineal con $\dim(\ker(T)) = n - 1$ y $T^2 \neq 0$. Demuestre que T es diagonalizable. ¿Esta afirmación es cierta si $T^2 = 0$?

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. (a) Sea $Q \in M(2 \times 2)$ una matriz ortogonal. Recuerde que $\det Q = \pm 1$.

(i) Suponga que $\det Q = 1$. Demuestre que existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Verifique que esto es una rotación de ángulo φ en contra de las manecillas del reloj.

(ii) Suponga que $\det Q = -1$. Demuestre que existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tal que $Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$.

Verifique que esto es la composición de una rotación de ángulo φ en contra de las manecillas del reloj. y una reflexión.

(iii) En los dos casos anteriores, encuentre todos los φ tal que Q tiene autovalores. En estos casos, encuentre los autovalores y autovectores.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. Considere la ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = Q. \quad (*)$$

Defina el vector $Y = (y, y', \dots, y^{(n)})^t$ cuyas entradas son funciones. Demuestre que Y satisface la ecuación diferencial de grado 1

$$Y' = AY$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Demuestre que el polinomio característico de la ecuación diferencial (*) es igual al polinomio característico de la matriz A .

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función lineal simétrica. Sea λ un autovalor de T y sea E_λ el espacio propio correspondiente. Demuestre que $\text{Im}(T|_{E_\lambda}) \subseteq E_\lambda$, $\text{Im}(T|_{E_\lambda^\perp}) \subseteq E_\lambda^\perp$ y que $T|_{E_\lambda^\perp}$ es simétrico.

Es decir, hay que probar que:

- (a) $x \in E_\lambda \implies Tx \in E_\lambda$,
- (b) $x \in E_\lambda^\perp \implies Tx \in E_\lambda^\perp$,
- (c) para todo $x, y \in E_\lambda^\perp$ se tiene que $\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle$.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. Demuestre que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ son semejantes.

Encuentre por lo menos dos matrices invertibles C distintas tal que $B = C^{-1}AC$. ¿Es posible escoger C tal que es ortogonal?

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. ¿Falso o verdadero? Justifique su respuesta con una prueba o con un contraejemplo.

- (a) Cada proyección ortogonal en un espacio de dimensión finita es diagonalizable.
- (b) Cada proyección ortogonal en un espacio de dimensión finita es una función ortogonal (es decir $P^t = P^{-1}$, después de escogencia de una base).
- (c) Los únicos autovalores posibles de una proyección ortogonal son 0 y 1.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. ¿Falso o verdadero? Justifique su respuesta con una prueba o con un contraejemplo.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sea $A : V \rightarrow V$ una función lineal.

(a) Los autovalores de A y de A^t coinciden.

(b) Suponga que A es simétrica e invertible. (Puede pensar en $V = \mathbb{R}^n$ y $A \in M(n \times n)$ con $A = A^t$.) Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A , entonces los autovalores de A^{-1} son $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. ¿Falso o verdadero? Justifique su respuesta con una prueba o con un contraejemplo.

Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y sean $A, B : V \rightarrow V$ funciones lineales.

(a) Suponga que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A y que μ_1, \dots, μ_n son los autovalores de B , entonces los autovalores de AB son $\mu_1\lambda_1, \dots, \mu_n\lambda_n$.

(b) Suponga que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces los autovalores de $A + \alpha$ son $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$.

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. Sea $A \in M(n \times n)$.

(a) Demuestre que 0 es autovalor de A si y solo si 0 es autovalor de $A^t A$. Demuestre que en este caso $\ker(A) = \ker(A^t A)$.

(b) ¿Se tiene que $\ker(A) = \ker(A^2)$?

Álgebra Lineal 2016-2

Quiz 4, Fecha de entrega: 23 de noviembre de 2016, 12 m

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Prbl 1	Taller	11	12	13	14	15	Σ
	Ejercicio						

Problem 1. (a) Sea $A \in M(3 \times 3)$ una matriz simétrica con $\det(A) = 12$. Suponga que 2 y 1 son autovalores de A . ¿Cuál es el tercer autovalor de A ?

(b) Sea $A \in M(3 \times 3)$ una matriz simétrica no invertible. Suponga que 2 y 1 son autovalores de A . ¿Cuál es el tercer autovalor de A ?