

Matemáticas 1105, 2020 Semestre I, Examen Parcial 1
14 de febrero, 2020

Duración del examen: 80 minutos

NOMBRE:

CÓDIGO:

Por favor escriba sus respuestas en una hoja aparte, pero entregue la hoja de los enunciados con la hoja con sus respuestas.

Puntos importantes:

1. Se permitirá el uso de una (1) sola hoja de notas, de tamaño de carta, durante este examen, lo cual se puede preparar antes del examen llenándola con fórmulas, notas, etcétera.
2. Aparte de dicha hoja, no se permite el uso de ayudas de ningún otro tipo: ni calculadoras, ni cuadernos, ni aparatos electrónicos, ni teléfonos celulares.
3. Todo aparato electrónico debe permanecer apagado durante el examen.
4. Respete el juramento uniandino: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”.
5. Antes de las 11 a.m. no se permite voltear esta hoja ni empezar a escribir respuestas.
6. Si sigue escribiendo, borrando, o modificando sus respuestas después de las 12:20 p.m., podría incurrir una penalidad o inclusive una nota de 0 en este examen.
7. Respuestas sin justificación no recibirán puntos.

Temas tratados: todos los temas de las secciones 1.1-1.4 y 3.1-3.5 del texto de Grossman.

1. (4 puntos) **Verdadero o Falso:** Para cada enunciado abajo, diga si es verdadero o falso. Respuestas incorrectas sin justificación no recibirán puntos.

(a) $(x - 1)^2 = 0$ implica que $x = 1$.

- (b) Las ecuaciones

$$2x + 6y = 1$$

y

$$x + 3y - 1 = 0$$

son equivalentes.

2. (12 puntos)

- (a) Escriba los coeficientes del sistema abajo en forma de una matriz, y luego utilice operaciones elementales por renglones para convertirlo en forma escalonada reducida. Muestre donde están los pivotes.

$$2x + 2y = 4$$

$$2y + 2z = 8$$

$$4y - z = 1$$

$$5y - z = 2$$

- (b) Encuentre **todas** las soluciones del sistema de ecuaciones del inciso (a). Si hay infinitas soluciones, indique claramente la forma general de la solución y cuáles son las variables libres.
- (c) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo abajo? Justifique claramente su respuesta.

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$4x_2 - x_3 = 0$$

$$5x_2 - x_3 = 0$$

3. (6 puntos) Encuentre valores de b y c que hacen que el sistema de ecuaciones abajo sea **inconsistente**.

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1$$

$$-4x_1 - 6x_2 + bx_3 = c$$

4. (8 puntos)

- (a) Encuentre un vector \mathbf{u} que cumple las tres condiciones: (i) \mathbf{u} es ortogonal a $(2, 4, 6)$, (ii) \mathbf{u} es ortogonal a $(1, -1, 3)$ y (iii) $\|\mathbf{u}\| = 1$.
- (b) ¿Existe solamente un vector \mathbf{u} que cumple estas tres condiciones?

5. (12 puntos) Para cada matriz abajo, diga si está en forma escalonada reducida por renglones o no. En caso que no lo es, realice operaciones elementales con renglones para ponerla en esa forma.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -15 & 0 & 20 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

(d)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. (8 puntos) Encuentre la ecuación para el plano en \mathbb{R}^3 que es paralelo al plano $3x + 2y + z = 4$ y que también pasa por la línea L dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = t + 1$$

$$y = t + 2$$

$$z = -5t + 3$$

(donde “ t ” representa un parámetro que puede tomar cualquier valor).

Matemáticas 1105, 2020 Semestre I, Examen Parcial 1
SOLUCIONES

1. **Verdadero o Falso:** Para cada enunciado abajo, diga si es verdadero o falso. Respuestas incorrectas sin justificación no recibirán puntos.

(Versión 1)

- (a) (2 puntos) $(x - 1)^2 = 0$ implica que $x = 1$.

Esta afirmación es verdadera. En general, $a^2 = 0$ si y solamente si $a = 0$, y en este caso $(x - 1)^2 = 0$ es equivalente a que $x - 1 = 0$, lo cual es equivalente a que $x = 1$.

- (b) (2 puntos) Las ecuaciones

$$2x + 6y = 1$$

y

$$x + 3y - 1 = 0$$

son equivalentes.

Esta afirmación es falsa.

$$2x + 6y = 1 \Leftrightarrow x + 3y = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x + 3y - \frac{1}{2} = 0,$$

pero por ejemplo si $x = 1/2$ y $y = 0$ la ecuación arriba se cumple mientras $x + 3y - 1 = -1/2 \neq 0$.

(Versión 2)

- (a) (2 puntos) $(x - 1)^2 = 9$ implica que $x = 4$.

Esta afirmación es falsa.

$$(x - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x - 1 = \pm 3 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ó } -2,$$

pero puede ser que $x = -2$ y $(x - 1)^2 = 9$ se cumple.

(b) (2 puntos) Las ecuaciones

$$2x + 3 = 5$$

y

$$x = 1$$

son equivalentes.

Esta afirmación es verdadera.

$$2x + 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

2. (a) (7 puntos) Escriba los coeficientes del sistema abajo en forma de una matriz, y luego utilice operaciones elementales por renglones para convertirlo en forma escalonada reducida. Muestre donde están los pivotes.

(Versión 1)

$$2x + 2y = 4$$

$$2y + 2z = 8$$

$$4y - z = 1$$

$$5y - z = 2$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz arriba está en la forma escalonada, con 3 pivotes (en las columnas 1, 2 y 3). Sin embargo, todavía no está en la forma escalonada *reducida* porque hay entradas arriba de los pivotes que no son iguales a cero.

Así que seguimos reduciendo así:

$$\dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La matriz arriba está en forma escalonada reducida. Tiene tres pivotes: los tres valores de 1 en las primeras tres columnas.

Si escribe correctamente la matriz aumentada del sistema en el primer paso: Eso vale 1 punto.

Si llega a una forma escalonada de la matriz, pero sin ser la forma *reducida* escalonada: Eso vale 4 puntos más (para dar 5 puntos).

Vale un punto más llegar a la forma escalonada reducida (para dar 6 puntos en total).

Finalmente, **vale un punto más** indicar los tres pivotes en la matriz escalonada, *independientemente de si encontró la forma reducida o no*.

Si planteó mal la matriz aumentada en el primer paso, pero hizo operaciones válidas en los renglones para llegar a una forma escalonada: eso vale entre 2 y 4 puntos.

(Versión 2)

$$2x + 2y = 6$$

$$2y + 2z = 10$$

$$4y - z = 5$$

$$5y - z = 7$$

Este sistema tiene la siguiente matriz aumentada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \end{array} \right)$$

Sólo cambié los valores en la columna derecha; los otros coeficientes para las variables quedaron iguales.

Haciendo el mismo proceso de reducción, llegamos a la matriz reducida escalonada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se aplicarán los mismos criterios de calificación a este punto.

- (b) (2 puntos) Encuentre **todas** las soluciones del sistema de ecuaciones del inciso (a). Si hay infinitas soluciones, indique claramente la forma general de la solución y cuáles son las variables libres.

SOLUCIÓN: En ambas versiones, hubo **una solución única** al sistema porque había un pivote en cada columna, menos la columna derecha.

En la Versión 1, la solución única era: $x = 1, y = 1, z = 3$.

En la Versión 2, la solución única era: $x = 1, y = 2, z = 3$.

Si hizo un error de aritmética en la reducción de la matriz en la parte (a), pero en la parte (b) convirtió correctamente la matriz reducida en una solución: Eso valdría los 2 puntos.

Si aquí escribe “el sistema es inconsistente porque hay más ecuaciones que variables” o algo equivalente: eso no vale ningún punto (porque no es verdad...).

- (c) (3 puntos) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo abajo? Justifique claramente su respuesta.

$$2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$2x_2 + 2x_3 = 0$$

$$4x_2 - x_3 = 0$$

$$5x_2 - x_3 = 0$$

SOLUCIÓN: En este sistema homogéneo, tenemos los mismos coeficientes al lado izquierdo que en el sistema de las partes (a) y (b), y su matriz es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Se puede efectuar el mismo proceso de reducción como en la parte (a), y las tres primeras columnas son iguales, así que el resultado será:

$$\dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se nota que hay un pivote en cada columna, menos la columna derecha, así que **el sistema tiene solución única**.

Para ganar los 3 puntos de este inciso, es suficiente citar el hecho general que “si un sistema lineal tiene solución única, entonces el sistema homogéneo asociado con los mismos coeficientes para los x_i también tiene solución única”.

3. (6 puntos) Encuentre valores de b y c que hacen que el sistema de ecuaciones abajo sea **inconsistente**.

(Versión 1)

$$2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1$$

$$-4x_1 - 6x_2 + bx_3 = c$$

SOLUCIÓN: La matriz asociada a este sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -4 & 1 \\ -4 & -6 & b & c \end{array} \right).$$

Podemos reducir esta matriz a la forma escalonada así:

$$\begin{aligned} \dots &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ -4 & -6 & b & c \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & b-8 & c+2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Para que sea *incógnita*, necesitamos que haya pivote en la columna derecha. Para lograr esto, $b - 8$ necesita ser igual a 0, y $c + 2$ debe ser distinto a cero; es decir, necesitamos $b = 8$ y $c \neq -2$. Por ejemplo, los valores $b = 8$, $c = 0$ funcionan.

Si intentó hacer una reducción de la matriz del sistema con operaciones sobre los renglones, eso vale por lo menos 3 puntos de los 6, así no llegó a la solución correcta.

Si escribe “ $b = 8$ y $c \neq -2$ ” (sin dar un valor concreto para c): está bien, eso vale todos los 6 puntos.

También sería válido simplemente notar que necesitamos que $b = 8$ para que los coeficientes de x_1, x_2, x_3 en la segunda ecuación sean múltiplos de los coeficientes en la primera ecuación, y luego $c \neq -2$ para que la constante a la derecha no sea el mismo múltiplo.

4. (a) (6 puntos) Encuentre un vector \mathbf{u} que cumple las tres condiciones: (i) \mathbf{u} es ortogonal a $(2, 4, 6)$, (ii) \mathbf{u} es ortogonal a $(1, -1, 3)$ y (iii) $\|\mathbf{u}\| = 1$.

SOLUCIÓN: Se puede calcular el producto cruz de $(2, 4, 6)$ y $(1, -1, 3)$ para llegar a

$$(2, 4, 6) \times (1, -1, 3) = (12 - (-6), 6 - 6, -2 - 4) = (18, 0, -6).$$

Pero este vector no tiene norma igual a 1. Su norma es

$$\begin{aligned} \|(18, 0, -6)\| &= 6\|(3, 0, -1)\| \\ &= 6\sqrt{3^2 + (-1)^2} \\ &= 6 \cdot \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Dividiendo por esta norma, obtenemos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{6\sqrt{10}}(18, 0, -6) = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

En vez de utilizar el producto cruz, otra manera válida de resolver este punto era plantear la matriz aumentada del sistema homogéneo así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

...y reducirla para obtener una solución, luego haciendo un proceso como arriba para asegurar que la norma sea 1.

Si no normalizó el producto cruz: Se restará 1 punto sobre los 6.

Si puso el negativo del producto cruz (cambiando los signos): Está bien, el negativo de la solución arriba también es válida!

- (b) (2 puntos) ¿Existe solamente un vector \mathbf{u} que cumple estas tres condiciones?

SOLUCIÓN: La respuesta correcta es **no**, no es única: si \mathbf{u} es un vector que cumple las tres condiciones, entonces $-\mathbf{u}$ también lo cumple (porque también será ortogonal a los mismos vectores, y $\|-\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\| = 1$).

Se puede ganar los 2 puntos de este inciso fácilmente aun si su solución al inciso (a) era incorrecta.

5. Para cada matriz abajo, diga si está en forma escalonada reducida por renglones o no. En caso que no lo es, realice operaciones elementales con renglones para ponerla en esa forma.

- (a) (3 puntos)
(Versión 1)

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La matriz arriba **no está** en forma escalonada reducida. Para ponerla en esa forma, necesitamos restar el Renglón 1 del Renglón 2, luego intercambiar renglones, así:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Finalmente, necesitamos dividir el último renglón por 3 para llegar a la forma reducida escalonada, así:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Versión 2)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz sí está en forma escalonada reducida, no tiene que hacer nada.

En la Versión 1, vale 1 punto notar que no está en forma escalonada reducida, y valen 2 puntos hacer la reducción correctamente.

En la Versión 2, valen los 3 puntos sólo notar que está en forma reducida y escalonada.

(b) (3 puntos)
(Versión 1)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz **no está** en forma escalonada reducida. Para reducirla, toca hacer las operaciones siguientes:

$$B \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(en el último paso, cambiamos el orden de los renglones).

(Versión 2)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

La matriz arriba **sí está en forma escalonada reducida**.

En la Versión 1, vale 1 punto notar que no está en forma escalonada reducida, y 2 puntos para realizar la reducción correctamente.

En la Versión 2, valen todos los 3 puntos solamente notar que sí está en forma escalonada reducida.

(c) (3 puntos)
(Versión 1)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -15 & 0 & 20 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz **no está reducida escalonada**, y se puede reducir así:

$$\begin{aligned} C &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(Versión 2)

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -15 & 0 & 20 & -5 \\ 5 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz **no está reducida escalonada**, y se puede reducir así:

$$\begin{aligned} C &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En ambas versiones, vale 1 punto notar que la matriz no está en forma escalonada reducida, y 2 puntos más para reducirla.

- (d) (3 puntos)
(Versión 1)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esta matriz sí está en forma escalonada reducida, y no hay ninguna reducción que necesitamos hacer.

(Versión 2)

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz original no estaba en forma escalonada reducida, pero después de restar el Renglón 1 del Renglón 2 sí está en forma escalonada reducida.

En la Versión 1, valen los 3 puntos sólo notar que está en forma reducida y escalonada.

En la Versión 2, vale 1 punto notar que no está en forma escalonada reducida, y valen 2 puntos hacer la reducción correctamente.

6. (8 puntos) Encuentre la ecuación para el plano en \mathbb{R}^3 que es paralelo al plano $3x + 2y + z = 4$ y que también pasa por la línea L dada por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}x &= t + 1 \\y &= t + 2 \\z &= -5t + 3\end{aligned}$$

(donde “ t ” representa un parámetro que puede tomar cualquier valor).

SOLUCIÓN: El plano que buscamos es ortogonal al vector $(3, 2, 1)$, así que tiene la forma general

$$3x + 2y + z = d$$

para alguna constante d . Ahora solo necesitamos encontrar el valor de d .

El plano pasa por la línea L . Poniendo el valor de $t = 0$ en las ecuaciones paramétricas para L , vemos que el plano tiene que pasar por el punto $(1, 2, 3)$. Por lo tanto, el plano que buscamos tiene la fórmula

$$(3, 2, 1) \cdot (x - 1, y - 2, z - 3) = 0$$

(donde el producto arriba es el producto punto). Expandiendo y simplificando la expresión arriba da

$$3(x - 1) + 2(y - 2) + (z - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 3 + 2y - 4 + z - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + z - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y + z = 10,$$

es decir que $d = 10$.

(Sería posible utilizar otro valor para t , por ejemplo $t = 1$, para encontrar un punto en el plano, pero siempre dará el mismo valor de d .)

Para darse cuenta que la forma del plano es “ $3x + 2y + z = d$ ”: vale 3 puntos.

Luego, encontrar el valor correcto de d por un proceso válido vale los otros 5 puntos.

Matemáticas 1105, 2020 Semestre I, Examen Parcial 2
13 de marzo, 2020

Duración del examen: 80 minutos

NOMBRE:

CÓDIGO:

Por favor escriba sus respuestas en una hoja aparte, pero entregue la hoja de los enunciados con la hoja con sus respuestas.

Puntos importantes:

1. Se permitirá el uso de una (1) sola hoja de notas, de tamaño de carta, durante este examen, lo cual se puede preparar antes del examen llenándola con fórmulas, notas, etcétera.
2. Aparte de dicha hoja, no se permite el uso de ayudas de ningún otro tipo: ni calculadoras, ni cuadernos, ni aparatos electrónicos, ni teléfonos celulares.
3. Todo aparato electrónico debe permanecer apagado durante el examen.
4. Respete el juramento uniandino: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”.
5. Antes de las 11 a.m. no se permite voltear esta hoja ni empezar a escribir respuestas.
6. Si sigue escribiendo, borrando, o modificando sus respuestas después de las 12:20 p.m., podría incurrir una penalidad o inclusive una nota de 0 en este examen.
7. En general, respuestas sin justificación no recibirán puntos, a menos que el enunciado de un punto diga lo contrario.

Temas tratados: todos los temas de las secciones 1.1-1.10, 2.1-2.4, 3.1-3.5 y 4.1-4.3 del texto de Grossman.

1. (14 puntos)

(a) Para cada matriz abajo, determine si es invertible o no. En caso que sí es invertible, calcule su inversa.

i.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ii.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

iii.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) ¿Cuál es el determinante de la matriz C arriba?

2. (10 puntos)

(a) Determine si existe una solución al sistema lineal abajo:

$$x + 2y + 3z = 3$$

$$3x + 2y + z = 0$$

$$4x + 4y + 4z = 0$$

(b) ¿Cuál es el determinante de la matriz abajo?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

3. (9 puntos)

(a) ¿Es el conjunto

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + z = 0\}$$

un subespacio del espacio vectorial \mathbb{R}^3 o no? (Recuerde que la notación arriba quiere decir que H es el conjunto de todos los vectores (x, y, z) en \mathbb{R}^3 que satisfacen la ecuación $3x + z = 0$.) Justifique claramente su respuesta.

- (b) Describa un subconjunto de $M_{2,2}$ que contiene por lo menos dos matrices pero **no** es subespacio de $M_{2,2}$. (Recuerde que $M_{2,2}$ es el espacio vectorial que consiste en todas las matrices 2×2 con entradas reales, bajo las operaciones usuales de suma y producto escalar.)
4. (6 puntos) Encuentre la ecuación de la forma $ax + by + cz = d$ para un plano en \mathbb{R}^3 que es ortogonal a la línea recta L dada por las ecuaciones

$$x = t + 1$$

$$y = 2t + 1$$

$$z = -3t + 5$$

y que pasa por el punto $(1, 1, 0)$.

5. (5 puntos) Indique si cada una de las afirmaciones es **verdadera** o **falsa**. **Cada respuesta correcta recibirá 1 punto, y cada respuesta incorrecta recibirá 0 puntos. No tiene que justificar sus respuestas para este punto.**

- (a) Si A es una matriz 2×2 y A es invertible, entonces $\det(A) > 0$.
- (b) Si B es una matriz 3×3 y uno de los renglones de B es un múltiplo escalar de otro renglón, entonces $\det(B) = 0$.
- (c) Si C es una matriz 4×4 , $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ y la ecuación

$$C \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

tiene por lo menos una solución para \mathbf{x} , entonces eso implica que C es invertible.

- (d) Si D, E son matrices 2×2 , entonces

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B).$$

- (e) Si F es una matriz 3×3 , entonces

$$\det(-F) = -\det(F).$$

6. (6 puntos) Escriba una matriz que cumple todas estas cuatro condiciones: (i) A de tamaño 3×3 , (ii) A es simétrica (es decir, $A^T = A$), (iii) el primer renglón de A es $(1, 2, 3)$ y (iv) A **no** es invertible.