MATE-1105: Álgebra lineal

Primer Examen Parcial 201720, 30 de agosto de 2017

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ________________

1	2	3	4	5	6	Σ
						/50

Esto es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: calculadora, cuadernos, notas, aparatos electrónicos, celular, etc. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón hasta que haya entregado el examen y salido del salón.
Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 9:30-11:50 (80 min).

¡Éxito!

9 pts. **Problema 1.** Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule $\|\vec{a}\|$.

(b) Calcule el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

(c) Calcule el área del paralelograma generado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

8 pts. **Problema 2.** Considere el plano $E : x+y-2z = 5$ y la recta $L : x = 3t,\ y = 1+t,\ z = 2t$.

(a) Calcule $E \cap L$.

(b) Encuentre una recta G que es paralela a L e intersecte a E.

10 pts. **Problema 3.** Dadas las rectas $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $L_2 : x = 1+5t,\ y = 4-2t,\ z = 3t$.

(a) Encuentre una recta G que es perpendicular a L_1 y L_2 e intersecta a L_1.

(b) Encuentre la ecuación del plano que es perpendicular a L_1 y contiene al punto $P(1, -2, 7)$.

13 pts. **Problema 4.** Sea E el plano dado por $E : 2x+y-3z = 1$ y sean $P(3, 4, 3)$, $Q(3, 1, 2)$, $R(0, 4, 1)$ puntos in R^3.

(a) Para cada uno de los puntos P, Q, R determine si pertenece a E.

(b) De un plano F se sabe que $P, Q \in F$ y $R \notin F$. Calcule $E \cap F$.

(c) Encuentre un ejemplo de un plano F tal que $P, Q \in F$ y $R \notin F$.

5 pts. **Problema 5.** Escribe el siguiente sistema de ecuaciones lineales como matriz aumentada y use la eliminación de Gauß o de Gauß-Jordan para obtener todas las soluciones.

$$x + y = 2, \quad 6x + 7y + 5z = 17, \quad x + y + z = 5.$$

5 pts. **Problema 6.** Encuentre todos los $s \in \mathbb{R}$ tal que el sistema de ecuaciones

$$sx + 2y = 1, \quad 3x + (s-2)y = 5$$

tenga exactamente una solución.

Universidad de los Andes — Departamento de Matemáticas

MATE-1105: Álgebra lineal

Segundo Examen Parcial 201720, 30 de septiembre de 2017

Nombre: ______________________________ Código: ________________

1	2	3	4	5	6	Σ
						/50

Esto es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: calculadora, cuadernos, notas, aparatos electrónicos, celular, etc. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón hasta que haya entregado el examen y salido del salón.
Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 9:30-11:50 (80 min).

¡Éxito!

En lo siguiente sean

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&0\\2&1&0&3\\3&0&1&2\\0&3&2&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&-3\\0&2&8\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3&7\\k&5\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}3&-2&2\\5&-1&2\\4&-3&3\end{pmatrix},\ \vec{v}_1=\begin{pmatrix}3\\-7\\-11\end{pmatrix}\ \vec{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ \vec{v}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\7\end{pmatrix}.$$

8 pts. **Problema 1.** Calcule el determinante de A y de AA^{-1}.

8 pts. **Problema 2.** Escriba B y B^{-1} como producto de matrices elementales. Use su resultado para calcular el determinante de B.

8 pts. **Problema 3.**

(a) Encuentre todos los k tal que la ecuación $D\vec{x}=\vec{0}$ tiene exactamente una solución.

(b) Para los k encontrados en (a), diga si la ecuación $D\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ tiene un solución. Si la tiene, encuéntrela.

8 pts. **Problema 4.**

(a) Demuestre que $F\vec{v}_1=\vec{e}_1,\ F\vec{v}_2=\vec{e}_2,\ F\vec{v}_3=\vec{e}_3$, donde los $\vec{e}_j$ son los vectores unitarios estandar de $\mathbb{R}^3$.

(b) Encuentre F^{-1}.

(c) Encuentre todas las soluciones (x,y,z) de

$$3x-2y+2z=2,\quad 5x-y+2z=-1,\quad 4x-3y+3z=6.$$

3 pts. **Problema 5.** Calcule el determinante de la matriz $C\in M(2n\times 2n)$ dada por

$$C=\left(\begin{array}{ccc|ccc} & & a_1 & & & \\ & \iddots & & & 0 & \\ a_n & & & & & \\ \hline & & & & & b_1 \\ & 0 & & & \iddots & \\ & & & b_n & & \end{array}\right).$$

Justifique bien su respuesta.

3 pts. **Problema 6.** Sea $A\in M(n\times n)$ y sea $\operatorname{adj}(A)$ su matriz adjunta. Suponga que $\det A=7$. Calcule $\det(\operatorname{adj}(A))$.

12 pts.

Problema 7. Sean $A, B \in M(n \times n)$. Diga si lo siguiente es falso o verdadero. Justifique sus respuestas bien.

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \ : \ x \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

Respuesta:

(b) Si $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones, entonces $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Respuesta:

(c) Si $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones para un $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

Respuesta:

(d) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

Respuesta:

(e) $\det(AB) = \det(BA)$.

Respuesta:

(f) $$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 17 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

MATE-1105: Álgebra lineal

Tercer Examen Parcial 201720, 08 de noviembre de 2017

Nombre: ______________________________ Código: ________________

1	2	3	4	5	Σ
					/50

Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma **clara y ordenada** *el procedimiento* **completo** *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 09:30-10:50 (80 min).

¡Éxito!

14 pts. **Problema 1.** Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(a) Encuentre una base de $\ker(A)$ y calcule $\dim(\ker(A))$.

(b) Determine si $\vec{x} \in \ker(A)$.

(c) Encuentre una base de $\operatorname{Im}(A)$ y calcule $\dim(\operatorname{Im}(A))$.

(d) Determine si $\vec{y} \in \operatorname{Im}(A)$.

(e) Complete las bases encontradas en (a) y (c) a bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^5$ respectivamente y exprese A con respecto a estas bases.

10 pts. **Problema 2.** En el espacio vectorial $M(2\times 2)$ consideramos el subespacio $U = \operatorname{gen}\{A, B, C, D, E\}$ con

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Determine si A, B, C, D, E son linealmente independiente.

(b) Calcule $\dim U$.

(c) De los vectores dados, escoja un subsistema de tres elementos que genere U.

(d) Con los vectores dados, encuentre dos bases distintas para U.

9 pts. **Problema 3.** Sea P el plano dado por $P : x + 2y - 3z = 0$.

(a) Encuentre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en el plano P que son linealmente independientes.

(b) Encuentre un vector $\vec{a}$ tal que $\operatorname{gen}\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}\} = \mathbb{R}^3$.

(c) Exprese el vector $\vec{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}$.

8 pts. **Problema 4.**

(a) Encuentre una matriz $R \in M(3 \times 4)$ cuya imagen es el plano $P : x + 2y - 3z = 0$.

(b) Encuentre una matriz $S \in M(5 \times 3)$ cuyo kernel es el plano $P : x + 2y - 3z = 0$.

9 pts.

Problema 5. De los siguientes literales, escoja **tres** y diga si son falsos o verdaderos. Marque claramente cuales literales escogió y **justifique sus respuestas bien** (demostración o contraejemplo!).

En lo siguiente sean U, V, W espacios vectoriales y $A : U \to V$, $B : V \to W$ funciones lineales.

(a) ¿Cuales de las siguientes afirmaciones son correctas?

$$\ker(BA) \subseteq \ker(B), \quad \ker(BA) \subseteq \ker(A), \quad \ker(BA) \supseteq \ker(A), \quad \ker(BA) \supseteq \ker(B).$$

Respuesta:

(b) $\dim(\ker(BA)) = \dim(\ker(B)) + \dim(\ker(A))$.

Respuesta:

(c) Existe una función lineal $S : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}^9$ con $\dim(\operatorname{Im}(S)) = 5$.
Existe una función lineal $T : \mathbb{R}^9 \to M(2 \times 2)$ con $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 5$.

Respuesta:

(d) Sea V un espacio vectorial y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Suponga que $w \in V$ **no** es combinación lineal de los $v_1, \dots, v_k$. Entonces $v_1, \dots, v_k, w$ son linealmente independientes.

Respuesta:

(e) Sean $v, w \in V$ vectores y defina $a := v + w$, $b := 2v - 3w$. Entonces $\operatorname{gen}\{v, w\} = \operatorname{gen}\{a, b\}$.

Respuesta: