MATE-1105: Álgebra lineal

**Primer Examen Parcial 201620, 26 de agosto de 2016**

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ________________

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |

*Esto es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: calculadora, cuadernos, notas, aparatos electrónicos, celular, etc. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón hasta que haya entregado el examen y salido del salón.*
*Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma* clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable.*
*Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 12:30-13:50 (80 min).*

**¡Éxito!**

9 pts. **Problema 1.** Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(a) Calcule $\|\vec{a}\|$.

(b) Calcule $\operatorname{proy}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

(c) Calcule el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

8 pts. **Problema 2.** Dadas las rectas $L_1 : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $L_2 : x = 1+5t,\ y = 4-2t,\ z = 3t$.

(a) Encuentre una recta $G$ que es perpendicular a $L_1$ y $L_2$ e intersecta a $L_1$.

(b) Encuentre la ecuación del plano que es perpendicular a $L_1$ y contiene al punto $P(1,-2,7)$.

12 pts. **Problema 3.** Considere los planos $E_1 : x + y - 2z = 5$ y $E_2 : 2x - 3y - z = 7$ y la recta $L : x = 4t,\ y = 1 + 2t,\ z = 3t$. Calcule las siguientes intersecciones y diga si la intersección es un plano, una recta, un punto o si es vacío.

(a) $E_1 \cap E_2$, (b) $E_1 \cap L$, (c) $E_2 \cap L$.

16 pts. **Problema 4.** Use la eliminación de Gauß o de Gauß-Jordan para obtener todas las soluciones de los siguientes sistemas.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 6, \\ 2x_1 - x_2 &= 3, \\ 3x_1 + 2x_2 &= 12. \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_4 &= 21, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 &= 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 8. \end{aligned}$$

5 pts. **Problema 5.** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $A\vec{v} \perp \vec{v}$.

MATE-1105: Álgebra lineal

**Segundo Examen Parcial 201620, 22 de septiembre de 2016**

Nombre: ______________________________ Código: ________________

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | /50 |

*Esto es un examen individual. No se permite el uso de ayudas de ningún tipo: calculadora, cuadernos, notas, aparatos electrónicos, celular, etc. Cualquier dispositivo electrónico (celulares, calculadoras, tabletas etc.) debe estar apagado y guardado durante el examen desde que entre el salón hasta que haya entregado el examen y salido del salón.*
*Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma* clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable.*
*Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.*
*Tiempo: 12:30-13:50 (80 min).*

**¡Éxito!**

En lo siguiente sean

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 10 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

6 pts. **Problema 1.** Calcule el determinante de la matriz $A$.

12 pts. **Problema 2.** Escriba $B$ y $B^{-1}$ como producto de matrices elementales. Use su resultado para calcular el determinante de $B$.

10 pts. **Problema 3.**

(a) Encuentre todos los $k$ tal que la ecuación $D\vec{x} = \vec{0}$ tiene exactamente una solución.

(b) Para los $k$ encontrados en (a), diga si la ecuación $D\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ tiene un solución. Si la tiene, encuéntrela.

7 pts. **Problema 4.** De los siguientes productos de matrices, diga cuales son posibles y calcúlelos: $FG$, $GF$, $G^tF$, $FG^t$, $G^tG$, $GG^t$.

3 pts. **Problema 5.** Calcule el determinante de la matriz $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots n}$ donde $c_{ij} = 0$ si $i+j \neq n+1$, es decir:

$$C = \begin{pmatrix} & \text{\Large 0} & & c_1 \\ & & c_2 & \\ & \iddots & & \\ c_{n,1} \quad c_n & & \text{\Large 0} & \end{pmatrix}.$$

Justifique bien su respuesta.

12 pts.

**Problema 6.** Sean $A, B \in M(n \times n)$. Diga si lo siguiente es falso o verdadero. Justifique sus respuestas bien.

(a) Si $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene exactamente una solución, entonces $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene exactamente una solución para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

**Respuesta:**

(b) Si $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones, entonces $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones para cada $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

**Respuesta:**

(c) Si $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene infinitas soluciones para un $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, entonces $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

**Respuesta:**

(d) $\det(A + B) = \det A + \det B$.

**Respuesta:**

(e) $\det(AA^t) < 0$.

**Respuesta:**

(f) $$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 17 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**Respuesta:**

MATE-1105: Álgebra lineal

**Tercer Examen Parcial 201620, 27 de octubre de 2016**

Nombre: ______________________________ Código: ________________

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | /50 |

*Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma* clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cual es y por qué es aplicable.*
*Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.*
*Tiempo: 15:30-16:50 (80 min).*

**¡Éxito!**

En lo siguiente sean $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & -1 & 20 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 20 \\ 2 & 1 & 8 & -2 & 8 \\ -1 & 3 & 3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 16 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 11 & -1 & 20 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 20 \\ -2 & -1 & -8 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

15 pts.

**Problema 1.** En lo siguente puede usar que $E$ y $F$ son biyectivas y que $A = A_1 E$ y $A = F A_2$ (no tiene que probarlo). Todas sus respuestas deben ser bien justificadas.

(a) Encuentre una base de $\ker(A)$ y calcule $\dim(\ker(A))$.

(b) Determine si $\vec{w} \in \ker(A)$.

(c) Encuentre una base de $\mathrm{Im}(A)$ y calcule $\dim(\mathrm{Im}(A))$.

(d) Complete la base de $\mathrm{Im}(A)$ encontrado en el literal anterior a una base $\mathbb{R}^5$.

11 pts.

**Problema 2.** Sea $U = \mathrm{gen}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4\}$.

(a) Determine si $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4$ son linealmente independiente.

(b) Calcule $\dim U$.

(c) De los vectores dados, escoja un subsistema linealmente independiente tal que genere $U$.

8 pts.

**Problema 3.** Encuentre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en el plano $P : x + 3y - 2z = 0$ que son linealmente independientes. Luego encuentre un vector $\vec{a}$ tal que $\mathrm{gen}\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{a}\} = \mathbb{R}^3$.

7 pts.

**Problema 4.**

(a) Encuentre una matriz $M \in M(4 \times 4)$ tal que $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{gen}\{\vec{u}_3, \vec{u}_4\}$.

(b) Encuentre una matriz $M \in M(4 \times 3)$ tal que $\ker(M) = \mathrm{gen}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$.

9 pts.

**Problema 5.** De los siguientes literales, escoja **tres** y diga si son falsos o verdaderos. Marque claramente cuales literales escogió y justifique sus respuestas bien.

(a) Para un sistema homogéneo de 3 ecuaciones lineales con 5 incógnitas siempre existe una solución notrivial.

**Respuesta:**

(b) Sea $V$ un espacio vectorial y sean $v_1, \dots, v_k \in V$. Suponga que $w \in V$ es combinación lineal de los $v_1, \dots, v_k$. Entonces $v_1, \dots, v_k, w$ son linealmente dependientes.

**Respuesta:**

(c) Sea $V$ un espacio vectorial y sean $v, w \in V$ vectores linealmente independientes. Entonces $a := v + w,\ b := 2v - 3w$ también son linealmente independientes.

**Respuesta:**

(d) El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq 1\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

**Respuesta:**

(e) Sean $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 3z + 1, \qquad B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ zy \end{pmatrix}.$$

Determine si $A$ y $B$ son funciones lineales.

**Respuesta:**