Parcial 1 - Tema A

24 DE AGOSTO 2013 — MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale** 2 **puntos.**

Ejercicio I

Se considera el sistema (S) : $\left\{\begin{array}{rrrcr} & x_2 & -2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +2x_3 & = & 2 \\ & x_2 & & = & 5 \end{array}\right.$.

1. Escriba el sistema (S) en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

2. Muestre que la matriz A anterior es invertible y calcule su inversa.

3. Resuelva el sistema (S).

Ejercicio II

Se considera el sistema (S) : $\left\{\begin{array}{rrcr} x & +2y & = & 5 \\ -3x & -6y & = & -15 \end{array}\right.$.

1. Resuelva el sistema (S).

2. Dibuje, en el plano de coordenadas (x, y), el conjunto de soluciones del sistema (S).

Ejercicio III

1. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \pi - 1 \end{bmatrix}$.

2. Calcule el determinante de la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & 10 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Resuelva el sistema $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & & -6x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & -6x_4 & = & 0 \\ & 2x_2 & & -12x_4 & = & 0 \end{array}\right.$.

Ejercicio IV

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. El sistema $\left\{\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 1 \\ 2x & -y & +2z & = & -1 \end{array}\right.$ tiene una cantidad infinita de soluciones.

2. Si n es un entero ≥ 2 y A y B son dos matrices de tamaño $n \times n$, entonces $AB = BA$.

3. Si A y B son dos matrices de tamaño 2×2 tales que $\det(A) = 2$ y $\det(B) = -\frac{1}{2}$, entonces B es invertible y $\det(2B^{-1}A^2) = -32$.

Parcial 2 - Tema A

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

Cada pregunta vale 2 puntos.

Ejercicio I

Sea P_3 el espacio de polinomios de grado *estrictamente* inferior a 3 y sea $\mathcal{B} = (1-x, 1+x, 1-x^2)$.

1. Muestre que $\mathcal{B}$ es una base de P_3.

2. Halle la matriz C de cambio de base de la base canónica $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ de P_3 a la base $\mathcal{B}$.

3. Halle las coordenadas, en la base $\mathcal{B}$, del vector $p = 1 + x + x^2$.

Ejercicio II

Considere los vectores $v_1 = (2, 4, -2)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (3, 3, 0)$ y $v_4 = (4, 2, 2)$ en $\mathbb{R}^3$.

1. Justificando su respuesta, diga si los vectores v_1, v_2, v_3 y v_4 son linealmente independientes.

2. Halle una base del sub-espacio W de $\mathbb{R}^3$ generado por v_1, v_2, v_3 y v_4.

3. Halle una base del núcleo (espacio nulo) de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio III

Considere el conjunto E de matrices 2×2 de la forma $A = \begin{bmatrix} 0 & a+b \\ a-b & 0 \end{bmatrix}$, donde a y b son dos reales cualesquiera.

1. Muestre que E es un sub-espacio vectorial del espacio de todas las matrices 2×2.

2. Determine la dimensión de E.

Ejercicio IV

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si A es una matriz 3×5 cuya forma escalón reducida tiene 2 pivotes, entonces la dimensión del núcleo de A es igual a 3.

2. La dimensión del sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (2, -1, 1, -1)$ y $v_3 = (1, -1, 0, -1)$ es igual a 2.

Parcial 3 - Tema A

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

Cada pregunta vale 2 puntos.

Ejercicio I

Se considera la aplicación $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+3y+3z, 3y+4z) \end{array}$.

1. Muestre que T es una aplicación lineal y halle la matriz de T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ (es decir, la representación matricial de T).

2. Halle una base del núcleo de T.

3. Halle una base de la imagen de T.

Ejercicio II

Sea R la recta de $\mathbb{R}^3$ generada por el vector $v_1 = (1,2,-1)$ y consideremos el vector $w = (1,6,1)$.

1. Halle la proyección ortogonal de w a R.

2. Sea $R^\perp$ el complemento ortogonal de R en $\mathbb{R}^3$. Halle la proyección ortogonal de w a $R^\perp$.

3. Halle una base de $R^\perp$.

Ejercicio III

Sea $F \subset \mathbb{R}^3$ el espacio de columnas de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$. Se denotan v_1 y v_2 los vectores columnas de A.

1. Muestre que la familia (v_1, v_2) es una base ortonormal de F.

2. Halle la proyección ortogonal a F del vector $w = (1,0,1)$.

Ejercicio IV

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea $E = C([-\pi;\pi];\mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas $f : [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, dotado con el producto escalar euclidiano $(f|g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$. Entonces la familia $(1, \operatorname{sen} t)$ es una familia ortogonal de E.

2. Sea R la recta de ecuación $x+y=0$ en $\mathbb{R}^2$. Entonces la proyección ortogonal a R tiene rango 2.

Examen final - Tema A (2 horas)

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas.

Cada pregunta vale 2 puntos. Este examen tiene dos caras.

Ejercicio I

Sea $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix} \right)$. Se denota $\mathcal{E}$ la base canónica (estándar) de $\mathbb{R}^3$.

1. Halle el volumen de la caja generada por los vectores de $\mathcal{B}$.

2. Muestre que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

3. Halle la matriz de transición (cambio de base) de la base $\mathcal{E}$ a la base $\mathcal{B}$.

4. Halle las coordenadas del vector $b = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{B}$.

Ejercicio II

Sea $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

1. Halle los valores propios de A.

2. Para cada valor propio λ de A, halle una base *ortonormal* del sub-espacio propio asociado (se recuerda que el sub-espacio propio asociado a λ es $E_\lambda := \ker(A - \lambda I_3)$).

Ejercicio III

Sea $(\mathcal{C})$ la cónica de ecuación $x^2 - 4xy + y^2 = 1$.

1. Escriba la ecuación anterior bajo la forma $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1$ donde A es una matriz simétrica real 2×2.

2. Halle una matriz ortogonal C y una matriz diagonal D tal que $A = CDC^t$ (donde C^t denota la transpuesta de la matriz C).

3. Identifique la cónica $(\mathcal{C})$ y dibújela en el marco de coordenadas (x, y).

Ejercicio IV

Sea $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$ y sea $b = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$.

1. Halle la solución de mínimos cuadrados del sistema $Ax = b$.

2. Halle la proyección ortogonal de b al plano de $\mathbb{R}^3$ generado por las columnas de A.

Ejercicio V

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea n un entero ≥ 1 y sea P_n el espacio de polinomios de grado $< n$. Sea $T : P_3 \longrightarrow P_2$ una aplicación de rango 2. Entonces $\ker T$ tiene dimensión 1.

2. La aplicación lineal $T : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + 2y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$ es diagonalizable.