

Parcial 1 - Tema A

16 DE FEBRERO 2013

MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen.

Cada pregunta vale 2 puntos.

Ejercicio I

Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

1. ¿Para cuál valor de $t \in \mathbb{R}$ es la matriz $B = \begin{pmatrix} -16 & t & 4 \\ 9 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ la inversa de A ?
2. Resuelva el sistema $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio II

Considere el sistema $(S) \begin{cases} 2x & +y & -z & = & 1 \\ -4x & -2y & +2z & = & -2 \end{cases}$.

1. Escriba el sistema (S) en forma matricial $A\vec{x} = \vec{b}$.
2. Escriba la solución general del sistema (S) en la forma $\vec{p} + \vec{h}$ donde \vec{p} es una solución particular de (S) y \vec{h} es la solución general del sistema homogéneo asociado.
3. Halle una base del espacio generado por las columnas de A .
4. ¿Está el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ en el espacio generado por las columnas de A ? Justifique su respuesta.
5. Recuerde que se denotó por A la matriz del sistema (S) . ¿Está el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en el núcleo (espacio nulo) de A ? Justifique su respuesta.
6. Halle una base del núcleo de A .

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (no se otorgarán puntos por respuestas no justificadas).

1. Sean $\vec{u} = [1, 2]$ y $\vec{v} = [2, 4]$ en \mathbb{R}^2 . Sea \vec{w} un vector en \mathbb{R}^2 tal que $\vec{w} \perp \vec{u}$ y $\vec{w} \perp \vec{v}$. Entonces $\vec{w} = \vec{0}$.
2. Sea $n \geq 2$ un entero. Si A es una matriz cuadrada no nula de tamaño n , entonces, para cualquier vector \vec{b} en \mathbb{R}^n , el sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ tiene una solución única.
3. Sea A la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Entonces la matriz $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es simétrica.

Parcial 2 - Tema A

9 DE MARZO 2013

MATE 1105

Este es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser **justificadas**.

Ejercicio I

Sea $\mathcal{M}(2; \mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices 2×2 con coeficientes reales. Se recuerda que se dice que una matriz cuadrada A es simétrica si $A^t = A$ y se denota

$$\mathcal{S}(2; \mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}(2; \mathbb{R}) \mid A^t = A\}$$

el conjunto de todas las matrices simétricas de tamaño 2×2 .

1. 2 puntos. Muestre que $\mathcal{S}(2; \mathbb{R})$ es un sub-espacio vectorial de $\mathcal{M}(2; \mathbb{R})$.

2. 2 puntos. Muestre que $\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de $\mathcal{S}(2; \mathbb{R})$.

3. 2 puntos. Determine la dimensión de $\mathcal{S}(2; \mathbb{R})$.

Ejercicio II

Sea R la recta de ecuación $y = -x$ en \mathbb{R}^2 y sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la reflexión con respecto a la recta R : $T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. 4 puntos. Halle $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. 2 puntos. Determine la matriz A de T en la base canónica de \mathbb{R}^2 (matriz estándar de T) y la expresión general de $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ para $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

3. 2 puntos. Se recuerda que, para cualquier $n \geq 1$, se denota $T^n = T \circ \dots \circ T$ la aplicación T compuesta n veces con sí misma. Calcule $T \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $T^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $T^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

4. 2 puntos. ¿Cuál es la matriz estándar de T^2 ? ¿Y de T^{101} ?

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (no se otorgarán puntos por respuestas no justificadas).

1. 2 puntos. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ 0 \\ x - y \end{pmatrix}$. Entonces la imagen de T en \mathbb{R}^3 es una recta (es decir, un sub-espacio vectorial de dimensión 1 de \mathbb{R}^3).

2. 2 puntos. El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es igual a 2.

3. 2 puntos. Sea $P_2 = \mathbb{R}_2[X]$ el espacio vectorial de los polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en \mathbb{R} . Entonces $(1+X)$ y $(1+X^2)$ son linealmente independientes en P_2 .

Parcial 3 - Tema A

20 DE ABRIL 2013

MATE 1105

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos.**

Ejercicio I

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -6 \\ 6 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Mostrar que el polinomio característico de A es $P_A(\lambda) = -(\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$.
2. Dé los valores propios de A e indique sus respectivas multiplicidades algebraicas.
3. Para cada valor propio λ de A , halle una base del sub-espacio propio correspondiente: $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_3)$.
4. Diga si A es diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tales que $C^{-1}AC = D$ (se pide justificar que C es invertible).
5. Calcule $A^5 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicio II

Se consideran los puntos $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 1, -1)$ y $B = (1, 1, 1)$ en \mathbb{R}^3 y se denota \mathcal{P} el plano generado por los vectores \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} .

1. Halle el área del paralelograma determinado por los vectores \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB} .
2. Halle una base de la recta \mathcal{P}^\perp (el complemento ortogonal de \mathcal{P} en \mathbb{R}^3).
3. Halle la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ a la recta \mathcal{P}^\perp .
4. Halle la distancia entre el punto $C = (1, 0, 1)$ y el plano \mathcal{P} .

Ejercicio III

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado inferior o igual a 2 con coeficientes en \mathbb{R} . Entonces la matriz de la transformación lineal

$$T: \begin{array}{ccc} P_2 & \longrightarrow & P_2 \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

en la base canónica $(1, X, X^2)$ de P_2 es $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, la matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ es invertible.

Examen final - Tema A (2 horas)

21 DE MAYO 2013

MATE 1105

Esto es un examen **individual**. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Los celulares deben estar **apagados** durante todo el examen. Las respuestas deben ser justificadas. **Cada pregunta vale 2 puntos.**

Ejercicio I

Se considera la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Halle los valores propios de A y, para cada valor propio, una base del sub-espacio propio correspondiente.
2. Halle una matriz ortogonal C y una matriz diagonal D tal que $C^t AC = D$ (justifique su respuesta).
3. Identifique la cónica de ecuación $x^2 + 4xy + y^2 = 1$ y dibújela.

Ejercicio II

Sea \mathcal{P} el plano de \mathbb{R}^3 de ecuación $y - 2z = 0$: $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y - 2z = 0\}$.

1. Verifique que el vector $v = [0, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}]$ pertenece a \mathcal{P} y halle una base ortonormal (v_1, v_2) de \mathcal{P} tal que $v_1 = v$.
2. Complete la familia ortonormal (v_1, v_2) en una base ortonormal (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 .
3. Halle las coordenadas, en la base hallada en la pregunta **2**, del vector $u = [1, 2, 1]$.

Ejercicio III

Sea W el plano de \mathbb{R}^4 generado por los vectores $v_1 = [-1, 1, 1, -1]$ y $v_2 = [0, 1, 1, 0]$.

1. Halle una base ortonormal de W .
2. Halle la matriz, en la base canónica de \mathbb{R}^4 , de la proyección ortogonal a W .
3. Si juntamos una base de W con una base de W^\perp , ¿cuál es la matriz, en la base de \mathbb{R}^4 así obtenida, de la proyección ortogonal a W ?

Ejercicio IV

Justificando su respuesta con una demostración o un contra-ejemplo, diga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. El sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -x + 2z = 1 \\ y + 3z = 3 \end{cases}$$

no tiene soluciones.

2. Si A es una matriz simétrica y P es una matriz cualquiera, entonces $P^t AP$ es simétrica.
3. Si v_1 y v_2 son dos vectores no nulos y ortogonales en \mathbb{R}^n , entonces son linealmente independientes.
4. Si C es una matriz 3×3 de determinante -2 y A es una matriz 3×3 de determinante 2 , entonces el determinante de la matriz $2CA^2C^{-1}$ es igual a 8 .