Parcial I – Álgebra Lineal

Agosto 25 de 2012

*Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.*

Punto I. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(i) `3 Puntos.` Encuentre la matriz inversa A^{-1}.

(ii) `2 Puntos.` Verifique que la matriz hallada en el punto anterior es la inversa de A.

(iii) `2 Puntos.` Considere el sistema no homogéneo $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ \quad\ \ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$ Encuentre el conjunto de soluciones a este sistema. (Observe que puede usar la matriz A de la primera parte del enunciado.)

(iv) `2 Puntos.` ¿Es el vector $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ combinación lineal de las columnas $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ y $\vec{w}_3$ de la matriz A? Si lo es, encuentre escalares a_1, a_2 y a_3 tales que $\vec{b} = a_1\vec{w}_1 + a_2\vec{w}_2 + a_3\vec{w}_3$.

Punto II. Considere el sistema no homogéneo de ecuaciones lineales

$$S: \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \quad\ -x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

(i) `2 Puntos.` Encuentre una solución particular del sistema S para la cual $x_3 = 0$.

(ii) `2 Puntos.` Resuelva el sistema homogéneo asociado.

(iii) `2 Puntos.` Encuentre la solución general para el sistema no homogéneo S. (Observe que puede usar las respuestas dadas en (i) y (ii).)

Punto III. Responda falso o verdadero, justificando (con un contraejemplo o una prueba, respectivamente) su respuesta.

(i) `2 Puntos.` Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz cuadrada, el conjunto W de soluciones al sistema lineal homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(ii) `2 Puntos.` Los puntos $(1,1)$, $(1,-1)$ y $(-1,0)$ son los vértices de un triangulo rectángulo en $\mathbb{R}^2$.

(iii) `2 Puntos.` Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, B y C son matrices cuadradas tales que $AB = AC$, entonces $B = C$.

Parcial II – Álgebra Lineal

Septiembre 22 de 2012

*Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.*

Punto I. Considere los vectores $\vec{v} = (1,1)$ y $\vec{w} = (1,-1)$ en $\mathbb{R}^2$.

(i) `2 Puntos.` Demuestre que el conjunto $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) `4 Puntos.` Hallar la matriz estándar[1] de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(\vec{v}) = \vec{v} \qquad \text{y} \qquad T(\vec{w}) = \vec{0}.$$

Calcule $T(\vec{x})$ para $\vec{x} = (3,1)$.

(iii) `2 Puntos.` Cuál es el rango de la matriz estándar de T? Explique.

Punto II. Sea $T : \mathrm{P}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(p(x)\right) = \begin{pmatrix} p(0) \\ -p'(0) \\ p(0) + p'(0) \end{pmatrix}.$$

(i) `2 Puntos.` Verifique que el polinomio $p(x) = 3x^2 - 2x^3$ pertenece a N_T, el espacio nulo de T.

(ii) `4 Puntos.` Encuentre una base para R_T, el rango o espacio imagen de T.

(iii) `2 Puntos.` Encuentre la dimensión de N_T.

Punto III. Responda falso o verdadero, justificando su respuesta.

(i) `2 Puntos.` La recta $\ell = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 1\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

(ii) `2 Puntos.` La aplicación $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$ es una transformación lineal.

(iii) `2 Puntos.` Si $T : V \to W$ es una transformación lineal y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base para V, entonces $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)\}$ es una base para W.

[1] Es decir, la matriz de la transformación T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Parcial III – Álgebra Lineal

Noviembre 3 de 2012

*Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.*

Punto I. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) `2 Puntos.` Encuentre los valores propios de A.

(ii) `2 Puntos.` Encuentre los espacios propios correspondientes a cada valor propio de A.

(iii) `2 Puntos.` Encuentre una base ortonormal para cada espacio propio.

(iv) `2 Puntos.` Encuentre una matriz D *diagonal* y una matriz C *ortogonal* tales que $D = C^{-1}AC$.

(v) `2 Puntos.` Calcule el determinante de la matriz A^3.

Punto II. Considere el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y - z = 0\right\}.$$

(i) `2 Puntos.` Encuentre el complemento ortogonal $\mathsf{W}^{\perp}$ de W.

(ii) `2 Puntos.` Encuentre una base B_{W} para W y una base $B_{\mathsf{W}^{\perp}}$ para $\mathsf{W}^{\perp}$.

(iii) `2 Puntos.` Verifique que la unión de las dos bases encontradas en el enunciado anterior forma una base B para $\mathbb{R}^3$. Encuentre las coordenadas del vector $\vec{x} = (1, 3, 5)$ en la base B.

(iv) `2 Puntos.` Encuentre la descomposición única $\vec{x} = \vec{x}_{\mathsf{W}} + \vec{x}_{\mathsf{W}^{\perp}}$ del vector $\vec{x} = (1, 3, 5)$, donde $\vec{x}_{\mathsf{W}} \in \mathsf{W}$ y $\vec{x}_{\mathsf{W}^{\perp}} \in \mathsf{W}^{\perp}$.

Punto III. Responda falso o verdadero, justificando su respuesta.

(i) `2 Puntos.` Si una matriz A es simétrica y ortogonal, entonces $A^2 = I$.

(ii) `2 Puntos.` El área del paralelogramo en $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 2)$ es $2\sqrt{3}$.

Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Noviembre 27 de 2012

(6 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, **justificando** matemáticamente su respuesta.

a. Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, A es invertible y $\det(AB) = 0$, entonces $\det B = 0$.

b. El sistema no homogeneo de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & -1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 & = & 1 \\ -2x_1 + 2x_2 \qquad & = & -2 \end{array}$$

tiene infinitas soluciones.

c. La dimensión del espacio de matrices simétricas 2×2 (matrices $A \in M_2(\mathbb{R})$ tales que $A^T = A$) es 2.

(10 Puntos) **II**. Sea R la recta de $\mathbb{R}^3$ generada por el vector $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre R.

a. Calcule $T(\vec{x})$ para $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b. Muestre que los vectores $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forman una base para el subespacio $R^\perp$ (el complemento ortogonal de la recta R).

c. Encuentre la matriz de T en la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

d. Encuentre la matriz de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

e. ¿Cuál es el rango de la transformación lineal T ?

(6 Puntos) **III**. Considere los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$, con la base canónica $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, y $P_2[x]$ con la base ordenada $B_2 = \{x^2, x, 1\}$. Sea

$$T : \mathbb{R}^2 \to P_2[x]$$

la transformación lineal definida por $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2x + 1$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x^2$.

a. Calcule $T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. Encuentre una base para el núcleo (espacio nulo) y una base para la imagen (rango) de T.

c. Encuentre la matriz M_T de la transformación lineal respecto a las bases B_1 y B_2.

(6 Puntos) **IV**. La órbita de un planeta alrededor del sol está dada por la curva $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 2$. Se quiere encontrar la distancia mínima que hay entre el planeta y el origen a lo largo del año, mediante los siguientes pasos:

a. Encuentre la matriz simétrica A tal que $5x^2 - 6xy + 5y^2 = \vec{x}^T A \vec{x}$, donde $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, y diagonalícela.

b. Haga un dibujo de la curva.

c. Determine la distancia mínima de la curva al origen. ¿Qué puntos sobre la curva realizan tal distancia?

Tiempo máximo 2 horas. No se permite el uso de tablas, libros, apuntes, calculadoras ni aparatos electrnicos. Todo teléfono celular debe estar apagado.