

MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202610, 27 de mayo de 2026

NOMBRE: _____

CÓDIGO: _____

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Pts	10	10	10	10	10	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagados y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y justifique por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 15:15-17:15 (120 min).

¡Éxitos!

Ejercicio 1. Sea L la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $A(-1, -3, 2)$ y $B(2, 6, -4)$ y sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- [2 pts] (a) Demuestre que L pasa por el origen y encuentre una base para L .
- [3 pts] (b) Encuentre una base para $L^\perp$ y su dimensión.
- [2 pts] (c) Encuentre la proyección de $\vec{w}$ sobre L y sobre $L^\perp$.
- [1 pts] (d) Encuentre la distancia del punto $P(-3, 7, -5)$ de L .
- [2 pts] (e) Encuentre un plano F que pasa por $Q(2, 3, 1)$ que no interseque a L .

Ejercicio 2. Recuerde que P_2 es el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y considere los polinomios

$$q_1(x) = x^2 - 2x, \quad q_2(x) = x + 2, \quad q_3(x) = x + 3$$

y la transformación

$$T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} -7a - 4b + 2c \\ 5a + 3b - 2c \\ -3a - 2b + 2c \\ 2a + b \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede asumir que T es una transformación lineal.

- [1 pts] (a) Dé la definición que q_1, q_2, q_3 son *linealmente independientes*.
- [3 pts] (b) Demuestre que $\{q_1, q_2, q_3\}$ es una base para P_2 . Explique bien sus cálculos.
- [1 pts] (c) Encuentre $T(q_1), T(q_2), T(q_3)$.
- [2 pts] (d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{q_1, q_2, q_3\}$ en P_2 y la base canónica en $\mathbb{R}^4$.
- [3 pts] (e) Encuentre una base para el kernel de T y su dimensión.

Ejercicio 3. Considere

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & k+3 & 0 & k \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- [3 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga solución única. (No es necesario encontrar la solución x, y, z, w .)
- [2 pts] (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ no tenga solución.
- [5 pts] (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga infinitas soluciones y encuentre estas soluciones.

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- [3 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
- [4 pts] (b) Encuentre bases ortonormales de los espacios propios de A y sus dimensiones.
- [2 pts] (c) ¿Existe una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ que consiste de vectores propios de A ?
- [1 pts] (d) ¿Existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \vec{v}$?

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

- [3 pts] (a) Sea A una matriz 3×3 con $\det(A) = 7$. Encuentre una matriz B tal que $\det(\frac{1}{2}B^{-1}A) = 5$.
- [3 pts] (b) Sea $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con imagen $\text{Im}(T) = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi \\ 4 + \pi \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $\dim(\text{Im}(T))$ y $\dim(\ker(T))$.

- [2 pts] (c) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\ker(A) = \ker(5A)$?
- [2 pts] (d) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\text{Im}(A) = \text{Im}(5A)$?

MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202610, 27 de mayo de 2026

NOMBRE: _____

CÓDIGO: _____

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Pts	10	10	10	10	10	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagados y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y justifique por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 15:15-17:15 (120 min).

¡Éxitos!

Ejercicio 1. Sea L la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $A(-2, -1, -3)$ y $B(4, 2, 6)$ y sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

- [2 pts] (a) Demuestre que L pasa por el origen y encuentre una base para L .
- [3 pts] (b) Encuentre una base para $L^\perp$ y su dimensión.
- [2 pts] (c) Encuentre la proyección de $\vec{w}$ sobre L y sobre $L^\perp$.
- [1 pts] (d) Encuentre la distancia del punto $P(1, 5, 7)$ de L .
- [2 pts] (e) Encuentre un plano F que pasa por $Q(5, 1, 2)$ que no interseque a L .

Ejercicio 2. Recuerde que P_2 es el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y considere los polinomios

$$q_1(x) = x^2 + 2, \quad q_2(x) = 3x + 1, \quad q_3(x) = 2x + 1$$

y la transformación

$$T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} -5a - b + 3c \\ 3a + b - 2c \\ -2a + c \\ 7a + b - 4c \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede asumir que T es una transformación lineal.

- [1 pts] (a) Dé la definición que q_1, q_2, q_3 son *linealmente independientes*.
- [3 pts] (b) Demuestre que $\{q_1, q_2, q_3\}$ es una base para P_2 . Explique bien sus cálculos.
- [1 pts] (c) Encuentre $T(q_1), T(q_2), T(q_3)$.
- [2 pts] (d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{q_1, q_2, q_3\}$ en P_2 y la base canónica en $\mathbb{R}^4$.
- [3 pts] (e) Encuentre una base para el kernel de T y su dimensión.

Ejercicio 3. Considere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & k \\ 3 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- [3 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga solución única. (No es necesario encontrar la solución x, y, z, w .)
- [2 pts] (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ no tenga solución.
- [5 pts] (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga infinitas soluciones y encuentre estas soluciones.

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- [3 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
- [4 pts] (b) Encuentre bases ortonormales de los espacios propios de A y sus dimensiones.
- [2 pts] (c) ¿Existe una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ que consiste de vectores propios de A ?
- [1 pts] (d) ¿Existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \vec{v}$?

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

- [3 pts] (a) Sea A una matriz 4×4 con $\det(A) = 3$. Encuentre una matriz B tal que $\det(2BA^{-1}) = 8$.
- [3 pts] (b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ una transformación lineal con kernel $\ker(T) = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2\pi + 1 \\ \pi + 6 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $\dim(\text{Im}(T))$ y $\dim(\ker(T))$.

- [2 pts] (c) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\ker(A) = \ker(4A)$?
- [2 pts] (d) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\text{Im}(A) = \text{Im}(4A)$?