

Examen Final 202610, 27 de mayo de 2026

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Pts	10	10	10	10	10	50
Pts						

Ejercicio 1. Sea L la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $A(-1, -3, 2)$ y $B(2, 6, -4)$ y sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$.

- [2 pts] (a) Demuestre que L pasa por el origen y encuentre una base para L .
 [3 pts] (b) Encuentre una base para $L^\perp$ y su dimensión.
 [2 pts] (c) Encuentre la proyección de $\vec{w}$ sobre L y sobre $L^\perp$.
 [1 pts] (d) Encuentre la distancia del punto $P(-3, 7, -5)$ de L .
 [2 pts] (e) Encuentre un plano F que pasa por $Q(2, 3, 1)$ que no interseque a L .

Solución:

(a) Forma vectorial de L :

$$L = \left\{ \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tomando $t = 3$, vemos que el origen pertenece a L , entonces

$$L = \text{gen}\{\vec{v}\} \quad \text{con} \quad \vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(b) El complemento ortogonal de L es el plano E cuyo vector normal es el vector director de L , es decir, $E : x + 3y - 2z = 0$. Su dimensión es $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 - \dim L = 3 - 1 = 2$.

(c) ■ $\text{proy}_L \vec{w} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{-3+21+10}{1+9+4} \vec{v} = \frac{28}{14} \vec{v} = 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$

■ $\text{proy}_E \vec{w} = \vec{w} - \text{proy}_L \vec{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

(d) Distancia entre $(-3, 7, -5)$ y L es igual a
 $\|\vec{w} - \text{proy}_L \vec{w}\| = \|\text{proy}_E \vec{w}\| = \sqrt{25 + 1 + 1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$

(e) El plano F debe ser paralelo a la recta L , es decir, su vector normal $\vec{n}_F$ debe ser perpendicular a L . Podemos tomar como vector normal $\vec{n}_F = (3, -1, 0)^t$, entonces $F : 3x - y = d$ con $d = 3 \cdot 2 - 3 = 3$. Dado que $Q \notin L$ y $F \parallel L$, se sigue que $L \cap F = \emptyset$.

Ejercicio 2. Recuerde que P_2 es el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y considere los polinomios

$$q_1(x) = x^2 - 2x, \quad q_2(x) = x + 2, \quad q_3(x) = x + 3$$

y la transformación

$$T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} -7a - 4b + 2c \\ 5a + 3b - 2c \\ -3a - 2b + 2c \\ 2a + b \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede asumir que T es una transformación lineal.

- [1 pts] (a) Dé la definición que q_1, q_2, q_3 son *linealmente independientes*.
- [3 pts] (b) Demuestre que $\{q_1, q_2, q_3\}$ es una base para P_2 . Explique bien sus cálculos.
- [1 pts] (c) Encuentre $T(q_1), T(q_2), T(q_3)$.
- [2 pts] (d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{q_1, q_2, q_3\}$ en P_2 y la base canónica en $\mathbb{R}^4$.
- [3 pts] (e) Encuentre una base para el kernel de T y su dimensión.

Solución:

- (a) Los vectores q_1, q_2, q_3 se llaman *linealmente independientes* si y solo si el sistema $aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0$ tiene la única solución $a = b = c = 0$.

- (b) La condición

$$0 = aq_1(x) + bq_2(x) + cq_3(x) = a(x^2 - 2x) + b(x + 2) + c(x + 3) = ax^2 + x(-2a + b + c) + 2b + 3c$$

lleva al sistema de ecuaciones para a, b, c

$$a = 0, \quad -2a + b + c = 0, \quad 2b + 3c = 0,$$

es decir $a = 0$, $b + c = 0$, $2b + 3c = 0$. La segunda ecuación da $b = -c$. Reemplazar en la tercer ecuación da $0 = -2c + 3c = c$, por lo tanto $c = 0$ y $b = -c = 0$.

- (c)

$$Tq_1 = \begin{pmatrix} -7+8 \\ 5-6 \\ -3+4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Tq_2 = \begin{pmatrix} -4+4 \\ 3-4 \\ -2+4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Tq_3 = \begin{pmatrix} -4+6 \\ 3-6 \\ -2+6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (d) Representación matricial de T en las bases dadas:

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- (e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\ker M_T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Por lo tanto,

$\ker T = \text{gen} \{-2q_2 - q_2 + q_3\} = \text{gen} \{-2x^2 + 4x + 1\}$ y tiene dimensión 1.

Ejercicio 3. Considere

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & k+3 & 0 & k \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- [3 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga solución única. (No es necesario encontrar la solución x, y, z, w .)
- [2 pts] (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ no tenga solución.
- [5 pts] (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga infinitas soluciones y encuentre estas soluciones.

Solución: Sea A_k la matriz dada y $\vec{b}$ el lado derecho en $(*)$. Podemos hacer Gauss-Jordan para obtener

$$(A_k | \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & b \\ 0 & k+3 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 6 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & b \\ 0 & k+3 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8-2b \end{array} \right) \quad (1)$$

También podríamos calcular el determinante de A_k (expansión en la fila 3 y luego con Sarrus):

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & k+3 & k \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} = 6(k+3) + 6k - 6k = 6(k+3). \quad (2)$$

(a) **Respuesta.** $k \neq -3$, $b \in \mathbb{R}$.

Para que $(*)$ tenga solución única, A_k debe ser invertible. Se ve de (3) o de (4) que esto pasa si y solo si $k \neq -3$. No hay ninguna condición sobre b .

(b) **Respuesta.** $k = -3$, $b \neq 5$.

Para que $(*)$ no tenga solución, A_k debe ser no invertible y b tal que el sistema es inconsistente. Reemplazamos $k = -3$ en (3):

$$(A_k | \vec{b}) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 8-2b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10-2b \end{array} \right).$$

La última fila muestra que el sistema es inconsistente si y solo si $b = 5$.

(c) **Respuesta.** $k = -3$, $b = 5$. En este caso, el cálculo en (b) muestra que $w = -1/3$, $z = 2$, $x + 3y + 4z = 5$, entonces la solución general es

$$x = -3y - 3, \quad z = 2, \quad w = -1/3, \quad y \text{ es variable libre.}$$

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 7 & 4 & -7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- [3 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
 [4 pts] (b) Encuentre bases ortonormales de los espacios propios de A y sus dimensiones.
 [2 pts] (c) ¿Existe una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ que consiste de vectores propios de A ?
 [1 pts] (d) ¿Existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \vec{v}$?

Solución:

(a) Los valores propios de A son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$ porque

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 7 & 4-\lambda & -7 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(4-\lambda) - (4-\lambda) \\ &= [(3-\lambda)^2 - 1](4-\lambda) = (3-\lambda-1)(3-\lambda+1)(4-\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)^2 \end{aligned}$$

(b) Calculamos los espacios propios:

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A - \lambda_{2,3} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

Espacio propio para $\lambda = 2$ es $\text{gen}\{\vec{v}_1\}$, tiene dimensión 1,
 Espacio propio para $\lambda = 4$ es $\text{gen}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, tiene dimensión 2.

Como ya tenemos que $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$, obtenemos bases ortonormales

$$\text{para } \lambda = 2: \frac{1}{\sqrt{51}}\vec{v}_1, \quad \text{para } \lambda = 4: \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_2, \vec{v}_3.$$

(c) Dado que A no es simétrica, no puede existir una base para $\mathbb{R}^3$ que consiste de vectores propios de A .

Alternativamente: Si existiera tal base, deberá contener (un múltiplo de) $\vec{v}_1$ y de vectores $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \ker(T - 4)$. Entonces $\vec{v}_1$ debería ser perpendicular a toda combinación lineal de $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$, en particular a $\vec{v}_2$, lo que claramente es falso.

(d) **Respuesta.** No existe ningún vector $\vec{v}$ con $A\vec{v} = \vec{v}$.

Si existiese tal vector, entonces 1 debería ser valor propio de A , y ya sabemos que es falso.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

- [3 pts] (a) Sea A una matriz 3×3 con $\det(A) = 7$. Encuentre una matriz B tal que $\det(\frac{1}{2}B^{-1}A) = 5$.
[3 pts] (b) Sea $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal con imagen $\text{Im}(T) = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \pi \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \pi \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 + 2\pi \\ 4 + \pi \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $\dim(\text{Im}(T))$ y $\dim(\ker(T))$.

- [2 pts] (c) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\ker(A) = \ker(5A)$?
[2 pts] (d) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\text{Im}(A) = \text{Im}(5A)$?

Solución:

- (a) Sabemos que $5 = \det(\frac{1}{2}B^{-1}A) = \frac{1}{2^3}(\det B)^{-1}(\det A) = \frac{7}{8}(\det B)^{-1}$. Por lo tanto, $\det B = \frac{7}{40}$.

Podemos tomar por ejemplo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7/40 \end{pmatrix}$.

- (b) Note que $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_2 + \vec{v}_1$, por lo tanto $\text{Im}(T) = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Claramente, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes, por lo tanto $\dim(\text{Im}(T)) = 2$. Por lo tanto $\dim(\ker(T)) = \dim(\mathbb{R}^6) - \dim(\text{Im}(T)) = 6 - 2 = 4$.

- (c) **Respuesta.** Sí.

Solución. $\vec{x} \in \ker A \iff A\vec{x} = \vec{0} \iff 5A\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} \in \ker(5A)$.

- (d) **Respuesta.** Sí.

Solución. $\vec{y} \in \text{Im } A \iff A\vec{x} = \vec{y}$ para algún $\vec{x} \iff 5A(\frac{1}{5}\vec{x}) = \vec{y} \iff \vec{y} \in \text{Im}(5A)$.

Examen Final 202610, 27 de mayo de 2026

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Pts	10	10	10	10	10	50
Pts						

Ejercicio 1. Sea L la recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por los puntos $A(-2, -1, -3)$ y $B(4, 2, 6)$ y sea $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

- [2 pts] (a) Demuestre que L pasa por el origen y encuentre una base para L .
 [3 pts] (b) Encuentre una base para $L^\perp$ y su dimensión.
 [2 pts] (c) Encuentre la proyección de $\vec{w}$ sobre L y sobre $L^\perp$.
 [1 pts] (d) Encuentre la distancia del punto $P(1, 5, 7)$ de L .
 [2 pts] (e) Encuentre un plano F que pasa por $Q(5, 1, 2)$ que no interseque a L .

Solución:

(a) Forma vectorial de L :

$$L = \left\{ \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tomando $t = 3$, vemos que el origen pertenece a L , entonces

$$L = \text{gen}\{\vec{v}\} \quad \text{con} \quad \vec{v} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) El complemento ortogonal de L es el plano E cuyo vector normal es el vector director de L , es decir, $E : 2x + y + 3z = 0$. Su dimensión es $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 - \dim L = 3 - 1 = 2$.

(c) ■ $\text{proy}_L \vec{w} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v} = \frac{2+5+21}{1+9+4} \vec{v} = \frac{28}{14} \vec{v} = 2\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$

■ $\text{proy}_E \vec{w} = \vec{w} - \text{proy}_L \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(d) Distancia entre $(1, 5, 7)$ y L es igual a
 $\|\vec{w} - \text{proy}_L \vec{w}\| = \|\text{proy}_E \vec{w}\| = \sqrt{9 + 9 + 1} = \sqrt{19}.$

(e) El plano F debe ser paralelo a la recta L , es decir, su vector normal $\vec{n}_F$ debe ser perpendicular a L . Podemos tomar como vector normal $\vec{n}_F = (1, -2, 0)^t$, entonces $F : x - 2y = d$ con $d = 5 - 2 \cdot 1 = 3$. Dado que $Q \notin L$ y $F \parallel L$, se sigue que $L \cap F = \emptyset$.

Ejercicio 2. Recuerde que P_2 es el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y considere los polinomios

$$q_1(x) = x^2 + 2, \quad q_2(x) = 3x + 1, \quad q_3(x) = 2x + 1$$

y la transformación

$$T : P_2 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} -5a - b + 3c \\ 3a + b - 2c \\ -2a + c \\ 7a + b - 4c \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede asumir que T es una transformación lineal.

- [1 pts] (a) Dé la definición que q_1, q_2, q_3 son *linealmente independientes*.
- [3 pts] (b) Demuestre que $\{q_1, q_2, q_3\}$ es una base para P_2 . Explique bien sus cálculos.
- [1 pts] (c) Encuentre $T(q_1), T(q_2), T(q_3)$.
- [2 pts] (d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{q_1, q_2, q_3\}$ en P_2 y la base canónica en $\mathbb{R}^4$.
- [3 pts] (e) Encuentre una base para el kernel de T y su dimensión.

Solución:

- (a) Los vectores q_1, q_2, q_3 se llaman *linealmente independientes* si y solo si el sistema $aq_1 + bq_2 + cq_3 = 0$ tiene la única solución $a = b = c = 0$.

- (b) La condición

$$0 = aq_1(x) + bq_2(x) + cq_3(x) = a(x^2 + 2) + b(3x + 1) + c(2x + 1) = ax^2 + x(3b + 2c) + 2a + b + c$$

lleva al sistema de ecuaciones para a, b, c

$$a = 0, \quad 3b + 2c = 0, \quad 2a + b + c = 0,$$

es decir $a = 0, \quad 3b + 2c = 0, \quad b + c = 0$. La tercera ecuación da $b = -c$. Reemplazar en la segunda ecuación da $0 = -3c + 2c = -c$, por lo tanto $c = 0$ y $b = -c = 0$.

- (c)

$$Tq_1 = \begin{pmatrix} -5+6 \\ 3-4 \\ 0 \\ 7-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Tq_2 = \begin{pmatrix} -3+3 \\ 3-2 \\ 1 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Tq_3 = \begin{pmatrix} -2+3 \\ 2-2 \\ 1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (d) Representación matricial de T en las bases dadas:

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

- (e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\ker M_T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Por lo tanto,

$\ker T = \text{gen} \{-q_2 - q_3\} = \text{gen} \{-x^2 - x - 2\}$ y tiene dimensión 1.

Ejercicio 3. Considere

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 & k \\ 3 & 6 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad (*)$$

- [3 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga solución única. (No es necesario encontrar la solución x, y, z, w .)
- [2 pts] (b) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ no tenga solución.
- [5 pts] (c) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tenga infinitas soluciones y encuentre estas soluciones.

Solución: Sea A_k la matriz dada y $\vec{b}$ el lado derecho en $(*)$. Podemos hacer Gauss-Jordan para obtener

$$(A_k | \vec{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & a \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & k-2 & k & 6 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & a \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & k-2 & k & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6-3a \end{array} \right) \quad (3)$$

También podríamos calcular el determinante de A_k (expansión en la fila 2 y luego con Sarrus):

$$\det A_k = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & k-2 & k \\ 3 & 9 & 1 \end{pmatrix} = (k-2) + 9k - 9k = k-2. \quad (4)$$

(a) **Respuesta.** $k \neq 2$, $a \in \mathbb{R}$.

Para que $(*)$ tenga solución única, A_k debe ser invertible. Se ve de (b) o de (??) que esto pasa si y solo si $k \neq 2$. No hay ninguna condición sobre b .

(b) **Respuesta.** $k = 2$, $a \neq 1$.

Para que $(*)$ no tenga solución, A_k debe ser no invertible y b tal que el sistema es inconsistente. Reemplazamos $k = 2$ en (b):

$$(A_k | \vec{b}) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & a \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6-3a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & a \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3-3a \end{array} \right).$$

La última fila muestra que el sistema es inconsistente si y solo si $a = 1$.

(c) **Respuesta.** $k = 2$, $a = 1$. En este caso, el cálculo en (b) muestra que $w = 3$, $y = 2$, $x + 2y + 3z = 1$, entonces la solución general es

$$x = -3z - 4, \quad y = 2, \quad w = 3, \quad z \text{ es variable libre.}$$

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- [3 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
 [4 pts] (b) Encuentre bases ortonormales de los espacios propios de A y sus dimensiones.
 [2 pts] (c) ¿Existe una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ que consiste de vectores propios de A ?
 [1 pts] (d) ¿Existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, tal que $A\vec{v} = \vec{v}$?

Solución:

(a) Los valores propios de A son $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ porque

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 1 \\ 5 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2(2-\lambda) - (2-\lambda) \\ &= [(3-\lambda)^2 - 1](2-\lambda) = (3-\lambda-1)(3-\lambda+1)(2-\lambda) = (4-\lambda)(2-\lambda)^2 \end{aligned}$$

(b) Calculamos los espacios propios:

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A - \lambda_{2,3} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

Espacio propio para $\lambda = 2$ es $\text{gen}\{\vec{v}_1\}$, tiene dimensión 1,
 Espacio propio para $\lambda = 4$ es $\text{gen}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, tiene dimensión 2.

Como ya tenemos que $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$, obtenemos bases ortonormales

$$\text{para } \lambda = 2: \frac{1}{3\sqrt{3}}\vec{v}_1, \quad \text{para } \lambda = 4: \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_2, \vec{v}_3.$$

(c) Dado que A no es simétrica, no puede existir una base para $\mathbb{R}^3$ que consiste de vectores propios de A .

Alternativamente: Si existiera tal base, deberá contener (un múltiplo de) $\vec{v}_1$ y de vectores $\vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \ker(T - 2)$. Entonces $\vec{v}_1$ debería ser perpendicular a toda combinación lineal de $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$, en particular a $\vec{v}_2$, lo que claramente es falso.

(d) **Respuesta.** No existe ningún vector $\vec{v}$ con $A\vec{v} = \vec{v}$.

Si existiese tal vector, entonces 1 debería ser valor propio de A , y ya sabemos que es falso.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

- [3 pts] (a) Sea A una matriz 4×4 con $\det(A) = 3$. Encuentre una matriz B tal que $\det(2BA^{-1}) = 8$.
 [3 pts] (b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ una transformación lineal con kernel $\ker(T) = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ donde

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \pi \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \pi \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2\pi + 1 \\ \pi + 6 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $\dim(\text{Im}(T))$ y $\dim(\ker(T))$.

- [2 pts] (c) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\ker(A) = \ker(4A)$?
 [2 pts] (d) Sea A una matriz $n \times n$. ¿Se sigue que $\text{Im}(A) = \text{Im}(4A)$?

Solución:

- (a) Sabemos que $8 = \det(2BA^{-1}) = 2^4(\det B)(\det A)^{-1} = \frac{16}{3}(\det B)$. Por lo tanto, $\det B = \frac{3}{2}$.

Podemos tomar por ejemplo $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$.

- (b) Note que $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, por lo tanto $\ker(T) = \text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Claramente, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son linealmente independientes, por lo tanto $\dim(\ker(T)) = 2$. Por lo tanto $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\ker(T)) = 3 - 2 = 1$.

- (c) **Respuesta.** Sí.

Solución. $\vec{x} \in \ker A \iff A\vec{x} = \vec{0} \iff 4A\vec{x} = \vec{0} \iff \vec{x} \in \ker(4A)$.

- (d) **Respuesta.** Sí.

Solución. $\vec{y} \in \text{Im } A \iff A\vec{x} = \vec{y}$ para algún $\vec{x} \iff 4A(\frac{1}{4}\vec{x}) = \vec{y} \iff \vec{y} \in \text{Im}(4A)$.