

MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202520, 03 de diciembre de 2025

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Pts	10	8	10	10	12	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagados y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y justifique por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 15:00-17:00 (120 min).

¡Éxitos!

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

- [4 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
- [3 pts] (b) Encuentre bases de los espacios propios de A y sus dimensiones.
- [2 pts] (c) Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $D = C^{-1}AC$.
- [1 pts] (d) Encuentre AC y CD .

Ejercicio 2. En \mathbb{R}^3 , considere los vectores

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde k es un parámetro real.

- [6 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema de vectores $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ es linealmente independiente.
- [2 pts] (b) ¿Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que los vectores \vec{x} y \vec{y} son paralelos?

Ejercicio 3. En \mathbb{R}^4 , considere los vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $U := \text{gen}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

- [3 pts] (a) Encuentre una base y la dimensión de U .
 [2 pts] (b) Encuentre una **base ortogonal** de U .
 [2 pts] (c) Encuentre una **base** de U^\perp .
 [2 pts] (d) Encuentre vectores $\vec{y} \in U$ y $\vec{z} \in U^\perp$ tal que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
 [1 pts] (e) Encuentre la distancia del punto $(4, 3, 2, 4)$ al subespacio U .

Ejercicio 4. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con entradas reales y sea P_2 el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 2.

Sean

$$p_1(x) = x^2 - 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x,$$

y

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere la transformación

$$T: P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0) + p(1) & p(0) - p(1) \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal, que $\{p_1, p_2, p_3\}$ es una base para P_2 , y que $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ es una base para $M(2 \times 2)$.

- [4 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a las base $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ en $M(2 \times 2)$.
 [5 pts] (b) Encuentre una base para la imagen de T y encuentre la dimensión del imagen de T .
 [1 pts] (c) ¿Existe una base \mathcal{C} para $M(2 \times 2)$ tal que la representación matricial de T con respecto a las base $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y \mathcal{C} en $M(2 \times 2)$ tenga dos columnas iguales a 0? Justifique su respuesta.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

- [2 pts] (a) Sea A una matriz 100×360 con $\dim(\ker A) = 17$. Encuentre $\dim(\text{Im } A)$.
 [2 pts] (b) Sea A una matriz $n \times n$ con valor propio 2. ¿Es cierto que 16 es un valor propio de A^4 ?
 [4 pts] (c) En \mathbb{R}^3 , considere el plano $E: 3x - 2y + z = 5$ y las rectas

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}, \quad G: \frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{3} = z-5.$$

Para cada una de las rectas G y L , diga si interseca al plano E y justifique su respuesta.

- (d) Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 5\lambda + 13$.
 [2 pts] I. Encuentre n .
 [2 pts] II. ¿Es A invertible?

MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202520, 03 de diciembre de 2025

NOMBRE: _____ CÓDIGO: _____

Ejercicio	1	2	3	4	5	Total
Pts	10	8	10	10	12	50
Pts						

Este es un examen individual. No se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otra ayuda. Todos los aparatos electrónicos (calculadoras, celulares, relojes inteligentes, etc.) deben ser apagados y guardados. La presencia de cualquier ayuda externa o de cualquier dispositivo electrónico en su puesto de trabajo será considerado fraude académico.

Usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Soluciones sin desarrollo o justificación no valen. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y justifique por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado. Tiempo: 15:00-17:00 (120 min).

¡Éxitos!

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- [4 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
- [3 pts] (b) Encuentre bases de los espacios propios de A y sus dimensiones.
- [2 pts] (c) Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $D = C^{-1}AC$.
- [1 pts] (d) Encuentre AC y CD .

Ejercicio 2. En \mathbb{R}^3 , considere los vectores

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ k-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

donde k es un parámetro real.

- [6 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema de vectores $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ es linealmente independiente.
- [2 pts] (b) ¿Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que los vectores \vec{y} y \vec{z} son paralelos?

Ejercicio 3. En \mathbb{R}^4 , considere los vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $U := \text{gen}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

- [3 pts] (a) Encuentre una base y la dimensión de U .
 [2 pts] (b) Encuentre una base **ortogonal** de U .
 [2 pts] (c) Encuentre una **base** U^\perp .
 [2 pts] (d) Encuentre vectores $\vec{y} \in U$ y $\vec{z} \in U^\perp$ tal que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
 [1 pts] (e) Encuentre la distancia del punto $(5, -3, -2, 4)$ al subespacio U .

Ejercicio 4. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con entradas reales y sea P_2 el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 2.

Sean

$$p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x^2$$

y

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere la transformación

$$T: P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} p(0) - p(1) & p(0) + p(1) \\ p(0) & p(1) \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal, que $\{p_1, p_2, p_3\}$ es una base para P_2 , y que $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ es una base para $M(2 \times 2)$.

- [4 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a las base $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ en $M(2 \times 2)$.
 [5 pts] (b) Encuentre una base para la imagen de T y encuentre la dimensión del imagen de T .
 [1 pts] (c) ¿Existe una base \mathcal{C} para $M(2 \times 2)$ tal que la representación matricial de T con respecto a las base $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y \mathcal{C} en $M(2 \times 2)$ tenga dos columnas iguales a 0? Justifique su respuesta.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

- [2 pts] (a) Sea A una matriz 280×400 con $\dim(\text{Im } A) = 32$. Encuentre $\dim(\ker A)$.
 [2 pts] (b) Sea A una matriz $n \times n$ con valor propio 3. ¿Es cierto que 81 es un valor propio de A^4 ?
 [4 pts] (c) En \mathbb{R}^3 , considere el plano $E: x - 3y - 2z = 3$ y las rectas

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad G: \frac{x-2}{2} = y+2 = \frac{2z-1}{3}.$$

Para cada una de las rectas G y L , diga si interseca al plano E y justifique su respuesta.

- [2 pts] (d) Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 7$.
 [2 pts] i. Encuentre n .
 [2 pts] ii. ¿Es A invertible?