

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 6 & 6 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

- [4 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
 [3 pts] (b) Encuentre bases de los espacios propios de A y sus dimensiones.
 [2 pts] (c) Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $D = C^{-1}AC$.
 [1 pts] (d) Encuentre AC y CD .

Solución:

(a) Los valores propios de A son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ porque

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & 6 & -4 \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \\ 3 & 6 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)[(6 - \lambda)(-1 - \lambda) + 12] \\ &= (3 - \lambda)[\lambda^2 - 5\lambda + 6] = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 2). \end{aligned}$$

(b) Calculamos los espacios propios:

$$\begin{aligned} A - \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A - \lambda_{2,3} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

Espacio propio para $\lambda = 2$ es $\text{gen}\{\vec{v}_1\}$, tiene dimensión 1,
 Espacio propio para $\lambda = 3$ es $\text{gen}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, tiene dimensión 2.

(c) Para que $C^{-1}AC = D$ podemos tomar

$$C = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) $AC = CD = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. En \mathbb{R}^3 , considere los vectores

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donde k es un parametro real.

- [6 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema de vectores $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ es linealmente independiente.
[2 pts] (b) ¿Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que los vectores \vec{x} y \vec{y} son paralelos?

Solución:

- (a) **Respuesta.** Es sistema de vectores dados es linealmente independiente si y solo si $k \in \mathbb{R} \setminus \{3 \pm 2\sqrt{3}\}$.

Solución. Necesitamos que el sistema $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{0}$ tenga solución única. Esto pasa si y solo si la matriz A cuyas columnas son los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ es invertible, es decir, si y solo si $\det A \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 \neq \det \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 2 \\ 3 & k-1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} &= (k+1)(k-1) - 12 - [8(k-1) - 2(k+1)] \\ &= k^2 - 13 - 6k + 10 = k^2 - 6k - 3 \\ &= (k-3)^2 - 12 = (k-3-\sqrt{12})(k-3+\sqrt{12}). \end{aligned}$$

- (b) No existe ningún k que haga que $\vec{x} \parallel \vec{y}$. Para que sean paralelos, necesitaríamos que $k = -1$ (se sigue considerando la primera componente). Pero se ve que con este k los vectores no son paralelos.

Alternativamente: \vec{x} y \vec{y} son paralelos si y solo si producto cruz es igual a $\vec{0}$. Note que

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} -2(1+2k) \\ -2(k+1) \\ k^2-1 \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad k \in \mathbb{R},$$

porque para que la segunda componente sea 0, necesitamos $k = -1$, pero así la primera componente es $-2(1-2) = 2 \neq 0$.

Ejercicio 3. En \mathbb{R}^4 , considere los vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $U := \text{gen}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

- [3 pts] (a) Encuentre una base y la dimensión de U .
 [2 pts] (b) Encuentre una **base ortogonal** de U .
 [2 pts] (c) Encuentre una **base** de U^\perp .
 [2 pts] (d) Encuentre vectores $\vec{y} \in U$ y $\vec{z} \in U^\perp$ tal que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
 [1 pts] (e) Encuentre la distancia del punto $(4, 3, 2, 4)$ al subespacio U .

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\dim U = 2$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de U .

(b) Base ortonormal para U : $\vec{u}_1 = \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(1, 2, -0, 2)^t$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, 1)^t$.

En el ejercicio se pide solamente una base ortogonal, es decir, en realidad no es necesario normalizar los vectores.

Solución. Usamos Gram-Schmidt con la base encontrada en (a):

- $\vec{u}_1 := \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a}$,
- $\vec{u}'_2 := \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 = \vec{b} - \frac{18}{9}\vec{a} = (2, 3, 1, 5)^t - 2(1, 0, 2, 2)^t = (0, 3, -3, -3)^t = -3(0, -1, 1, 1)^t$,
 $\implies \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, 1)^t$.

(c) Base para U^\perp : $\vec{w}_1 = (-2, 1, 1, 0)^t$, $\vec{w}_2 = (-4, 1, 0, 1)^t$.

Para encontrar una base para U^\perp :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto una base para U^\perp es $\vec{w}_1 = (-2, 1, 1, 0)^t$, $\vec{w}_2 = (-4, 1, 0, 1)^t$.

- (d) ▪ $\vec{y} = \text{proy}_U \vec{x} = \langle \vec{u}_1, \vec{x} \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}_2, \vec{x} \rangle \vec{u}_2 = \frac{18}{9}\vec{a} + \frac{3}{3}(0, -1, 1, 1)^t = (2, 3, 1, 5)$,
 ▪ $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} = (4, 3, 2, 4)^t - (2, 3, 1, 5)^t = (2, 0, 1, -1)^t$.

(e) Note que $\vec{0P} = \vec{x}$. Por ende, la distancia de P a U es
 $\|\text{proy}_U \vec{x}\| = \|\vec{z}\| = \sqrt{4 + 0 + 1 + 1} = \sqrt{6}$.

Ejercicio 4. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con entradas reales y sea P_2 el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 2.

Sean

$$p_1(x) = x^2 - 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x,$$

y

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere la transformación

$$T : P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} p(0) & p(1) \\ p(0) + p(1) & p(0) - p(1) \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal, que $\{p_1, p_2, p_3\}$ es una base para P_2 , y que $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ es una base para $M(2 \times 2)$.

- [4 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a las bases $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ en $M(2 \times 2)$.
- [5 pts] (b) Encuentre una base para la imagen de T y encuentre la dimensión de la imagen de T .
- [1 pts] (c) ¿Existe una base \mathcal{C} para $M(2 \times 2)$ tal que la representación matricial de T con respecto a las bases $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y \mathcal{C} en $M(2 \times 2)$ tenga dos columnas iguales a 0? Justifique su respuesta.

Solución:

(a) Note que

$$Tp_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -E_1 + E_3 - E_4, \quad Tp_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2E_2 + 2E_3 - 2E_4,$$

$$Tp_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = E_2 + E_3 - E_4.$$

Por lo tanto, la representación matricial de T con respecto a las bases dadas es

$$A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gauß-Jordan para A_T nos da

$$A_T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\text{Im } A_T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y por lo tanto} \quad \text{Im } T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Si. Tome $\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \subset M(2 \times 2)$ tal que C_1, C_2 forman una base para $\text{Im } T$. Por ejemplo,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

[2 pts] (a) Sea A una matriz 100×360 con $\dim(\ker A) = 290$. Encuentre $\dim(\text{Im } A)$.

[2 pts] (b) Sea A una matriz $n \times n$ con valor propio 2. ¿Es cierto que 16 es un valor propio de A^4 ?

[4 pts] (c) En \mathbb{R}^3 , considere el plano $E : 3x - 2y + z = 5$ y las rectas

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}, \quad G : \frac{x-1}{2} = \frac{2y+1}{3} = z-5.$$

Para cada una de las rectas G y L , diga si interseca al plano E y justifique su respuesta.

(d) Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 - 5\lambda + 13$.

[2 pts] I. Encuentre n .

[2 pts] II. ¿Es A invertible?

Solución:

(a) $\dim(\text{Im } A) = \dim \mathbb{R}^{360} - \dim(\ker A) = 360 - 290 = 70$.

(b) Sea \vec{v} un vector propio de A para el valor propio 2. Entonces $A^4\vec{v} = A^3(A\vec{v}) = A^3(2\vec{v}) = 2A^3\vec{v} = \dots = 2^4\vec{v} = 16\vec{v}$. Por lo tanto 16 es valor propio para A^4 con vector propio \vec{v} .

(c) **Respuesta.** $E \cap L = \emptyset$, $E \cap G \neq \emptyset$,

Solución. El vector normal de E y vectores directores de las rectas son

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_L = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_G = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Observamos que $\langle \vec{n}, \vec{v}_L \rangle = 6 - 2 - 4 = 0$, entonces $L \parallel E$. Entonces solo hay dos opciones: $L \subset E$ o $L \cap E = \emptyset$. Dado que el punto $(1, 2, 3) \in L$ pero no en E (porque $3 - 4 + 3 = 2 \neq 5$), tenemos que L no interseca a E .

Alternativamente podemos calcular: $5 = 3(1 + 2t) - 2(2 + t) + 3 - 4t = 2$ lo que es imposible.

- Observamos que $\langle \vec{n}, \vec{v}_G \rangle = 6 - 3 + 1 = 4 \neq 0$, entonces $L \not\parallel E$, por lo tanto la recta interseca al plano E .

Si queremos, podemos calcular la intersección: De la fórmula para G obtenemos que $x = 2t + 1$, $y = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$, $z = t + 5$. En la ecuación del plano:

$$5 = 3(2t + 1) - 2\left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right) + t + 5 = 4t + 9 \implies t = -1 \implies E \cap G = (-1, -2, 4).$$

(d) $n = 4$ y A es invertible porque $\det A = p_A(0) = 13 \neq 0$.

MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202520, 03 de diciembre de 2025

Ejercicio 1. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- [4 pts] (a) Encuentre los valores propios de A .
 [3 pts] (b) Encuentre bases de los espacios propios de A y sus dimensiones.
 [2 pts] (c) Encuentre una matriz invertible C y una matriz diagonal D tal que $D = C^{-1}AC$.
 [1 pts] (d) Encuentre AC y CD .

Solución:

(a) Los valores propios de A son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$ porque

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 6 & 3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)[(5 - \lambda)(1 - \lambda) + 3] \\ &= (2 - \lambda)[\lambda^2 - 6\lambda + 8] = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 4). \end{aligned}$$

(b) Calculamos los espacios propios:

$$\begin{aligned} A - \lambda_{1,2} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ A - \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto:

Espacio propio para $\lambda = 2$ es $\text{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, tiene dimensión 2,
 Espacio propio para $\lambda = 4$ es $\text{gen}\{\vec{v}_3\}$, tiene dimensión 1.

(c) Para que $C^{-1}AC = D$ podemos tomar

$$C = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(d) $AC = CD = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -12 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 2. En \mathbb{R}^3 , considere los vectores

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 5 \\ k-1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{z} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ k+1 \end{pmatrix}$$

donde k es un parametro real.

- [6 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema de vectores $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ es linealmente independiente.
[2 pts] (b) ¿Existe $k \in \mathbb{R}$ tal que los vectores \vec{y} y \vec{z} son paralelos?

Solución:

- (a) **Respuesta.** Es sistema de vectores dados es linealmente independiente si y solo si $k \in \mathbb{R} \setminus \{3 \pm \sqrt{14}\}$.

Solución. Necesitamos que el sistema $a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z} = \vec{0}$ tenga solución única. Esto pasa si y solo si la matriz A cuyas columnas son los vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ es invertible, es decir, si y solo si $\det A \neq 0$.

$$\begin{aligned} 0 \neq \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 2 & k-1 & 1 \\ 2 & 0 & k+1 \end{pmatrix} &= (k+1)(k-1) + 10 - [-4(k-1) + 10(k+1)] \\ &= k^2 + 9 - 6k - 14 = k^2 - 6k - 5 \\ &= (k-3)^2 - 14 = (k-3-\sqrt{14})(k-3+\sqrt{14}). \end{aligned}$$

- (b) No existe ningún k que haga que $\vec{x} \parallel \vec{y}$. Para que sean paralelos, necesitaríamos que $k = 1$ (por la última componente). Pero se ve que con este k los vectores no son paralelos.

Alternativamente: \vec{y} y \vec{z} son paralelos si y solo si producto cruz es igual a $\vec{0}$. Note que

$$\vec{y} \times \vec{z} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 \\ -5(k+1) \\ 5 + 2(k-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 - 1 \\ -5(k+1) \\ -7 + 2k \end{pmatrix} \neq \vec{0}, \quad k \in \mathbb{R}$$

porque para que la segunda componente sea 0, necesitamos $k = -1$, pero así la tercer componente es $-7 - 2 = -9 \neq 0$.

Ejercicio 3. En \mathbb{R}^4 , considere los vectores

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y el subespacio $U := \text{gen}\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$.

- [3 pts] (a) Encuentre una base y la dimensión de U .
 [2 pts] (b) Encuentre una base **ortogonal** de U .
 [2 pts] (c) Encuentre una **base** U^\perp .
 [2 pts] (d) Encuentre vectores $\vec{y} \in U$ y $\vec{z} \in U^\perp$ tal que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.
 [1 pts] (e) Encuentre la distancia del punto $(5, -3, -2, 4)$ al subespacio U .

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\dim U = 2$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base de U .

(b) Base ortonormal para U : $\vec{u}_1 = \frac{1}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(1, 0, 2, 2)^t$, $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -2, -1, 1)^t$.

En el ejercicio se pide solamente una base ortogonal, es decir, en realidad no es necesario normalizar los vectores.

Solución. Usamos Gram-Schmidt con la base encontrada en (a):

- $\vec{u}_1 := \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a}$,
- $\vec{u}'_2 := \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 = \vec{b} - \frac{18}{9}\vec{a} = (2, -2, 3, 5)^t - 2(1, 0, 2, 2)^t = (0, -2, -1, 1)^t$,
 $\implies \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, -2, -1, 1)^t$.

(c) Base para U^\perp : $\vec{w}_1 = (-4, -1, 2, 0)^t$, $\vec{w}_2 = (-4, 1, 0, 2)^t$.

Para encontrar una base para U^\perp :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto una base para U^\perp es $\vec{w}_1 = (-4, -1, 2, 0)^t$, $\vec{w}_2 = (-4, 1, 0, 2)^t$.

- (d) ▪ $\vec{y} = \text{proy}_U \vec{x} = \langle \vec{u}_1, \vec{x} \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{u}_2, \vec{x} \rangle \vec{u}_2 = \frac{9}{9}\vec{a} - \frac{12}{6}(0, 2, 1, -1)^t = \vec{a} - 2(0, 2, 1, -1)$
 $= (1, -4, 0, 4)$,
 ▪ $\vec{z} = \vec{x} - \vec{y} = (5, -3, -2, 4)^t - (1, -4, 0, 4)^t = (4, 1, -2, 0)^t$.

(e) Note que $\vec{0P} = \vec{x}$. Por ende, la distancia de P a U es

$$\|\text{proy}_U \vec{x}\| = \|\vec{z}\| = \sqrt{16 + 1 + 4} = \sqrt{21}.$$

Ejercicio 4. Sea $M_{2 \times 2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con entradas reales y sea P_2 el espacio de todos los polinomios con coeficientes reales de grado a lo más 2.

Sean

$$p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = x^2 + x, \quad p_3(x) = x^2$$

y

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere la transformación

$$T : P_2 \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} p(0) - p(1) & p(0) + p(1) \\ p(0) & p(1) \end{pmatrix}.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal, que $\{p_1, p_2, p_3\}$ es una base para P_2 , y que $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ es una base para $M(2 \times 2)$.

- [4 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a las bases $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ en $M(2 \times 2)$.
- [5 pts] (b) Encuentre una base para la imagen de T y encuentre la dimensión de la imagen de T .
- [1 pts] (c) ¿Existe una base \mathcal{C} para $M(2 \times 2)$ tal que la representación matricial de T con respecto a las bases $\{p_1, p_2, p_3\}$ en P_2 y \mathcal{C} en $M(2 \times 2)$ tenga dos columnas iguales a 0? Justifique su respuesta.

Solución:

(a) Note que

$$Tp_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = E_1 + 3E_2 + 2E_3 + 2E_4, \quad Tp_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2E_1 + 2E_3 - 2E_4,$$

$$Tp_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -E_1 + E_2 + E_4.$$

Por lo tanto, la representación matricial de T con respecto a las bases dadas es

$$A_T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gauß-Jordan para A_T nos da

$$A_T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\text{Im } A_T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad \text{y por lo tanto} \quad \text{Im } T = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Si. Tome $\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \subset M(2 \times 2)$ tal que C_1, C_2 forman una base para $\text{Im } T$. Por ejemplo,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y **justifique bien** sus respuestas.

[2 pts] (a) Sea A una matriz 280×400 con $\dim(\text{Im } A) = 32$. Encuentre $\dim(\ker A)$.

[2 pts] (b) Sea A una matriz $n \times n$ con valor propio 3. ¿Es cierto que 81 es un valor propio de A^4 ?

[4 pts] (c) En \mathbb{R}^3 , considere el plano $E : x - 3y - 2z = 3$ y las rectas

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad G : \frac{x-2}{2} = y+2 = \frac{2z-1}{3}.$$

Para cada una de las rectas G y L , diga si interseca al plano E y justifique su respuesta.

(d) Sea A una matriz $n \times n$ con polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 2\lambda - 7$.

[2 pts] I. Encuentre n .

[2 pts] II. ¿Es A invertible?

Solución:

(a) $\dim(\ker A) = \dim \mathbb{R}^{400} - \dim(\text{Im } A) = 400 - 32 = 368$.

(b) Sea \vec{v} un vector propio de A para el valor propio 3. Entonces $A^4\vec{v} = A^3(A\vec{v}) = A^3(3\vec{v}) = 3A^3\vec{v} = \dots = 3^4\vec{v} = 81\vec{v}$. Por lo tanto 81 es valor propio para A^4 con vector propio \vec{v} .

(c) **Respuesta.** $E \cap L = \emptyset$, $E \cap G \neq \emptyset$,

Solución. El vector normal de E y vectores directores de las rectas son

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_L = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_G = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix}.$$

- Observamos que $\langle \vec{n}, \vec{v}_L \rangle = 4 - 6 - 2 = 0$, entonces $L \parallel E$. Entonces solo hay dos opciones: $L \subset E$ o $L \cap E = \emptyset$. Dado que el punto $(5, 4, 2) \in L$ pero no en E (porque $5 - 6 - 4 = -5 \neq 3$), tenemos que L no interseca a E .

Alternativamente podemos calcular: $3 = (5 + 4t) - 3(4 + 2t) - 2(2 - t) = -11$ lo que es imposible.

- Observamos que $\langle \vec{n}, \vec{v}_G \rangle = 2 - 3 - 3 = -4 \neq 0$, entonces $L \not\parallel E$, por lo tanto la recta interseca al plano E .

Si queremos, podemos calcular la intersección: De la fórmula para G obtenemos que $x = 2t + 2$, $y = t - 2$, $z = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$. En la ecuación del plano:

$$3 = (2t + 2) - 3(t - 2) - 2\left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\right) = -4t + 7 \implies t = 1 \implies E \cap G = (4, -1, 2).$$

(d) $n = 6$ y A es invertible porque $\det A = p_A(0) = 7 \neq 0$.