MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202420, 02 de diciembre de 2024

Ejercicio 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^4$. Defina el conjunto

$$W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}.$$

[3 pts] (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal de W.

[3 pts] (b) Encuentre una base para W y su dimensión $\dim W$.

[2 pts] (c) Para $\vec{a}$ y $\vec{b}$, diga si pertenecen a $W^\perp$. Justifique su respuesta.

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_1{}^t \\ \vec{w}_2{}^t \\ \vec{w}_3{}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 3 & 12 \\ 0 & 5 & 5 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U^\perp = \text{gen}\{\vec{x}_1,\, \vec{x}_2\} \qquad \text{con} \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) **Solución 1.** Con el resultado de (a), tenemos que $\dim U = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W^\perp = 4 - 2 = 2$. En particular, cualquier pareja de vectores linealmente independientes en W son una base para W, por ejemplo $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es una base para W.

Solución 2.

$$(\vec{w}_1|\vec{w}_2|\vec{w}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 12 & 20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto $\dim W = 2$ y $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es una base para W.

(c) **Solución 1.** Productos internos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con los vectores de la base para W:

- $\langle \vec{a},\, \vec{w}_1 \rangle = 1 + 4 - 25 = -20 \neq 0$, por lo tanto $\boxed{\vec{a} \notin W^\perp}$.
- $\langle \vec{b},\, \vec{w}_1 \rangle = -10 + 10 = 0$, $\langle \vec{b},\, \vec{w}_2 \rangle = -5 + 9 - 4 = 0$, por lo tanto $\boxed{\vec{b} \in W^\perp}$.

Solución 2. $\vec{a} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \implies \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que no es posible. (Para que la igualdad se cumpla en la tercer y cuarta componente, necesitaríamos $c_1 = c_2 = 2$, pero entonces no se tiene igualdad en al primera y segunda componente). Por lo tanto $\vec{a} \notin W^\perp$.

$\vec{b} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que se cumple para $c_1 = -1, c_2 = 3$. Por lo tanto $\vec{b} \in W^\perp$.

¡No para uso comercial! Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 2. Considere la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

[4 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tiene una única solución.

[6 pts] (b) Encuentre la inversa de la matriz en $(*)$ para $k = 0$ y encuentre la solución de $(*)$.

Solución:

(a) Calculamos con la regla de Sarrus

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = k(k+2) + 2 - [6k+1] = k^2 - 4k + 1 = (k-2)^2 - 3.$$

Por lo tanto, el sistema tiene solución única si y solo si $\boxed{k \in \mathbb{R} \setminus \{2 \pm \sqrt{3}\}}$.

(b) Sea A la matriz en $(*)$ con $k = 0$. Entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo tanto A^{-1} y la solución $\vec{x}$ son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas
de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 3. Sea P_3 el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 3 y considere la transformación

$$T : P_3 \to \mathbb{R}^2, \qquad Tp = \begin{pmatrix} p(1) + p(-1) \\ p'(1) + p'(-1) \end{pmatrix}.$$

En P_3 consideramos la base $\mathcal{B} = \{p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4\}$ donde

$$p_1(x) = x^3 + x^2,\ \ p_2(x) = x^3 + 1,\ \ p_3(x) = x,\ \ p_4(x) = x - 1.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal y que $\mathcal{B}$ es una base para P_3.

[3 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ para P_3 y la base canónica para $\mathbb{R}^2$.

[3 pts] (b) Encuentre una base para el kernel $\ker T$ y su dimensión.

[3 pts] (c) Encuentre una base para la imagen $\operatorname{Im} T$ y su dimensión.

[1 pts] (d) Diga si el polinomio $r(x) = x^2$ pertenece al kernel de T.

Solución:

(a)

$$Tp_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ Tp_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ Tp_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ Tp_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz que representa a T en las bases dadas es

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando la matriz A_T podemos calcular Entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 6 & 6 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $\dim(\ker T) = 2$ y

$$\begin{aligned} \ker T &= \operatorname{gen}\{p_1 - 2p_2,\ p_1 - 4p_3 + p_4\} \\ &= \operatorname{gen}\{x^2 - 1,\ x^3 + x^2 - 3x - 1\} \\ &= \operatorname{gen}\{x^2 - 1,\ x^3 - 3x\} \end{aligned}$$

(c) El cálculo anterior demuestra que $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$ y que

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2.$$

(d) $r \notin \ker T$ porque $Tr = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$.

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

[6 pts] (a) Encuentre los valores propios de A y encuentre una base para cada espacio propio de A.

[3 pts] (b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$.

[1 pts] (c) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}AQ = D$.

Solución:

(a) Los valores propios de A son $\boxed{\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 5}$ porque

$$\det(A-\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2(5-\lambda) - 9(5-\lambda) = (5-\lambda)[(2-\lambda)^2 - 9]$$
$$= (5-\lambda)(2-\lambda-3)(2-\lambda+3) = -(5-\lambda)^2(1+\lambda).$$

Calculamos los vectores propios:

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A - \lambda_{2,3} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Para que $C^{-1}AC = D$ podemos tomar

$$C = (\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Para que $Q^{-1}AQ = D$ podemos tomar

$$C = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1 \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_2 \,\middle|\, \vec{v}_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

¡No para uso comercial!
Material elaborada por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

[2 pts] (a) Encuentre la distancia del punto $P(1,2,3)$ al plano $E : 2x - y + 3z = 0$.

[2 pts] (b) Sean A, B matrices 3×3 con $\det A = 5$ y $\det B = 6$. Encuentre $\det(3AB^{-1})$.

[2 pts] (c) Diga si es verdad y justifique su respuesta: Toda matriz invertible es simétrica.

[2 pts] (d) Diga si el conjunto $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

[2 pts] (e) Diga si la siguiente transformación es lineal y justifique su respuesta.

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad S \begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x| - y \\ z + y \end{pmatrix}.$$

[2 pts] (f) Suponga que un sistema lineal inhomogéneo $n \times n$ es inconsistente. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo asociado?

Solución:

(a) $\operatorname{dist}(P, E) = \|\operatorname{proy}_{E^\perp} \overrightarrow{OP}\| = \left\| \frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{OP} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{OP} \rangle}{\|\vec{n}\|} = \frac{9}{\sqrt{14}}$.

(b) $\det(3AB^{-1}) = 3^3 (\det A)(\det B)^{-1} = \frac{27 \cdot 5}{6} = \frac{45}{2}$.

(c) La afirmación es falsa. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible (porque su determinante no es 0), pero no es simétrica.

(d) U no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ porque no contiene al vector $\vec{0}$ porque la segunda componente de los vectores en U siempre es ≥ 1.

(e) La transformación S no es lineal porque $S(-\vec{e}_1) = S(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo tanto $S(-\vec{e}_1) \neq -S(\vec{e}_1)$.

(f) Si hay un lado derecho para el cual el sistema es inconsistente, entonces la matriz de coeficientes no puede ser invertible. Esto significa que el sistema homogéneo asociado tiene infinitas soluciones.

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

MATE-1105: Álgebra Lineal

Examen Final 202420, 02 de diciembre de 2024

Ejercicio 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, vectores en $\mathbb{R}^4$. Defina el conjunto

$$W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}.$$

[3 pts] (a) Encuentre una base para el complemento ortogonal de W.

[3 pts] (b) Encuentre una base para W y su dimensión $\dim W$.

[2 pts] (c) Para $\vec{a}$ y $\vec{b}$, diga si pertenecen a $W^\perp$. Justifique su respuesta.

Solución:

(a)

$$\begin{pmatrix} \vec{w}_1{}^t \\ \vec{w}_2{}^t \\ \vec{w}_3{}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -3 & -6 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$U^\perp = \text{gen}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\} \qquad \text{con} \qquad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) **Solución 1.** Con el resultado de (a), tenemos que $\dim U = \dim \mathbb{R}^4 - \dim W^\perp = 4 - 2 = 2$. En particular, cualquier pareja de vectores linealmente independientes en W son una base para W, por ejemplo $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es una base para W.

Solución 2.

$$(\vec{w}_1|\vec{w}_2|\vec{w}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -8 & -6 \\ 0 & -12 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\dim W = 2$ y $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es una base para W.

(c) **Solución 1.** Productos internos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con los vectores de la base para W:

- $\langle \vec{a}, \vec{w}_1 \rangle = 7 - 15 + 8 = 0$, $\langle \vec{a}, \vec{w}_2 \rangle = 21 - 21 = 0$, por lo tanto $\boxed{\vec{a} \in W^\perp}$.
- $\langle \vec{b}, \vec{w}_1 \rangle = 2 - 2 + 5 - 16 = -11 \neq 0$, por lo tanto $\boxed{\vec{b} \notin W^\perp}$.

Solución 2. $\vec{a} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \implies \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que se cumple para $c_1 = -3, c_2 = 2$.

Por lo tanto $\vec{a} \in W^\perp$.

$\vec{b} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 \implies \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que no es posible. (Para que la igualdad se cumpla en la tercer y cuarta componente, necesitaríamos $c_1 = 1$, $c_2 = -4$, pero entonces no se tiene igualdad en al primera y segunda componente). Por lo tanto $\vec{b} \notin W^\perp$.

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 2. Considere la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k-3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

[4 pts] (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que el sistema $(*)$ tiene una única solución.

[6 pts] (b) Encuentre la inversa de la matriz en $(*)$ para $k = 0$ y encuentre la solución de $(*)$.

Solución:

(a) Calculamos con la regla de Sarrus

$$0 \neq \det \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & k-3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = k(k-3) + 2 - [3k+1] = k^2 - 6k + 1 = (k-3)^2 - 8.$$

Por lo tanto, el sistema tiene solución única si y solo si $\boxed{k \in \mathbb{R} \setminus \{3 \pm \sqrt{8}\}}$.

(b) Sea A la matriz en $(*)$ con $k = 0$. Entonces

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 9 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -6 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Por lo tanto A^{-1} y la solución $\vec{x}$ son

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 3. Sea P_3 el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a 3 y considere la transformación

$$T : P_3 \to \mathbb{R}^2, \qquad Tp = \begin{pmatrix} p(1) - p(-1) \\ p''(0) + 2p(0) \end{pmatrix}.$$

En P_3 consideramos la base $\mathcal{B} = \{p_1,\, p_2,\, p_3,\, p_4\}$ donde

$$p_1(x) = x^3 - x^2,\; p_2(x) = x^2 - x,\; p_3(x) = x^2,\; p_4(x) = x - 3.$$

Sin prueba puede usar que T es una transformación lineal y que $\mathcal{B}$ es una base para P_3.

[3 pts] (a) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ para P_3 y la base canónica para $\mathbb{R}^2$.

[3 pts] (b) Encuentre una base para el kernel $\ker T$ y su dimensión.

[3 pts] (c) Encuentre una base para la imagen $\operatorname{Im} T$ y su dimensión.

[1 pts] (d) Diga si el polinomio $q(x) = x^3$ pertenece al kernel de T.

Solución:

(a)

$$Tp_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix},\; Tp_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix},\; Tp_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix},\; Tp_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz que representa a T en las bases dadas es

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando la matriz A_T podemos calcular Entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, $\dim(\ker T) = 2$ y

$$\begin{aligned} \ker T &= \operatorname{gen}\{p_1 + p_2,\; -p_1 + 2p_3 + p_4\} \\ &= \operatorname{gen}\{x^3 - x,\; x^3 + 3x^2 - x - 3\} \\ &= \operatorname{gen}\{x^3 - x,\; x^2 - 1\}. \end{aligned}$$

(c) El cálculo anterior demuestra que $\dim(\operatorname{Im} T) = 2$ y que

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \operatorname{gen}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2.$$

(d) $q \in \ker T$, $r \notin \ker T$ porque

$$Tq = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\; Tr = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 4. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

[6 pts] (a) Encuentre los valores propios de A y encuentre una base para cada espacio propio de A.

[3 pts] (b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$.

[1 pts] (c) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tal que $Q^{-1}AQ = D$.

Solución:

(a) Los valores propios de A son $\boxed{\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 3}$ porque

$$\det(A-\lambda) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2(3-\lambda) - 4(3-\lambda) = (3-\lambda)[(5-\lambda)^2 - 4]$$
$$= (3-\lambda)(5-\lambda-2)(5-\lambda+2) = -(3-\lambda)^2(\lambda-7).$$

Calculamos los vectores propios:

$$A - \lambda_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$A - \lambda_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Para que $C^{-1}AC = D$ podemos tomar

$$C = (\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) Para que $Q^{-1}AQ = D$ podemos tomar

$$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_1 \middle| \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_2 \middle| \vec{v}_3 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.

Ejercicio 5. Conteste a las siguientes preguntas y justifique sus respuestas.

[2 pts] (a) Encuentre la distancia del punto $P(3,1,1)$ al plano $E: x - 3y + 2z = 0$.

[2 pts] (b) Sean A, B matrices 3×3 con $\det A = 3$ y $\det B = 4$. Encuentre $\det(\frac{1}{2}A^{-1}B)$.

[2 pts] (c) Diga si es verdad y justifique su respuesta: Toda matriz simétrica es invertible.

[2 pts] (d) Diga si la siguiente transformación es lineal y justifique su respuesta.

$$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+|z| \end{pmatrix}.$$

[2 pts] (e) Diga si el conjunto $U := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2+1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

[2 pts] (f) Suponga que un sistema lineal inhomogéneo $n \times n$ es inconsistente. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo asociado?

Solución:

(a) $\operatorname{dist}(P,E) = \|\operatorname{proy}_{E^\perp} \overrightarrow{OP}\| = \left\| \frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{OP} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} \right\| = \frac{\langle \vec{n}, \overrightarrow{OP} \rangle}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{14}}$.

(b) $\det(\frac{1}{2}A^{-1}B) = (\frac{1}{2})^3(\det A)^{-1}(\det B) = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$.

(c) La afirmación es falsa. Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es simétrica pero no es invertible (porque su determinante es 0).

(d) U no es un subespacio de $\mathbb{R}^2$ porque no contiene al vector $\vec{0}$ porque la segunda componente de los vectores en U siempre es ≥ 1.

(e) La transformación S no es lineal porque $S(-\vec{e}_3) = S(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, por lo tanto $S(-\vec{e}_3) \neq -S(\vec{e}_3)$.

(f) Si hay un lado derecho para el cual el sistema es inconsistente, entonces la matriz de coeficientes no puede ser invertible. Esto significa que el sistema homogéneo asociado tiene infinitas soluciones.

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes.