MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 202320, 09 de diciembre de 2023 – SOLUCIONES

Problema 1. Para un parámetro real k considere la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & k & -7 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que la matriz A_k **no** es invertible.

4 pts. (b) Encuentre la matriz inversa de A_5, es decir, la inversa de la matriz A_k con $k = 5$.

Solución.

(a) A_k es no invertible si y solo si $\det A_k = 0$, es decir, si y solo si

$$0 = \det A_k = k^2 - 14 - [-4k + 6k] = k^2 - 2k - 14 = (k-1)^2 - 15.$$

Por lo tanto, A_k no es invertible si y solo si $k = 1 \pm \sqrt{15}$.

(b) $A_5^{-1} = \begin{pmatrix} 25 & -10 & 6 \\ -22 & 9 & -5 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ porque

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 9 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -19 & 8 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & 22 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 25 & -10 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -22 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 2 & -1 \end{array}\right).$$

Problema 2. Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre los valores propios de B.

4 pts. (b) Encuentre bases para los espacios propios de B y sus dimensiones.

2 pts. (c) Encuentre una matriz invertible U y una matriz diagonal D tal que $U^{-1}BU = D$.

Solución.

(a) Los valores propios de B son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 5$ porque

$$0 = \det(B - \lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)(4-\lambda) - [4(5-\lambda)]$$
$$= (5-\lambda)\big[(1-\lambda)(4-\lambda) - 4\big] = (5-\lambda)\big[\lambda^2 - 5\lambda\big] = -\lambda(5-\lambda)^2.$$

(b) $\mathrm{Eig}_0(B) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\dim \mathrm{Eig}_0(B) = 1$ porque

$$B - 0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Eig}_5(B) = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim \mathrm{Eig}_5(B) = 2$ porque

$$B - 5 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Para $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz cuyas columnas son los vectores de las bases encontradas en (b) se tiene que $U^{-1}BU = D$.

Problema 3. Sea P_2 el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y sea $M_{2\times 2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con coeficientes reales. Definimos

$$T : P_2 \to M_{2\times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} p(0)+p'(0) & p'(1) \\ p'(2)-p(2) & 0 \end{pmatrix},$$

4 pts. (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

3 pts. (b) Encuentre la dimensión de $\ker T$.

3 pts. (c) Encuentre la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

Solución.

(a) Sean $p, q \in P_2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(p+\alpha q) &= \begin{pmatrix} (p+\alpha q)(0)+(p+\alpha q)'(0) & (p+\alpha q)'(1) \\ (p+\alpha q)'(2)-(p+\alpha q)(2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(0)+\alpha q(0)+p'(0)+\alpha q'(0) & p'(1)+\alpha q'(1) \\ p'(2)+\alpha q'(2)-p(2)-\alpha q(2) & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p(0)+p'(0) & p'(1) \\ p'(2)-p(2) & 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} q(0)+\alpha q'(0) & q'(1) \\ q'(2)-\alpha q(2) & 0 \end{pmatrix} = Tp + \alpha Tq. \end{aligned}$$

(b) $\boxed{\ker T = \operatorname{span}\{\frac{1}{2}X^2 - X + 1\},\ \dim(\ker T) = 1.}$

Para $p(X) = aX^2 + bX + c$ tenemos que $p'(X) = 2aX + b$ y $p''(X) = 2a$. Por lo tanto

$$Tp = \begin{pmatrix} c+b & 2a+b \\ 4a+b-4a-2b-c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+b & 2a+b \\ -b-c & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces $p \in \ker T$ si y solo si

$$b+c=0, \quad 2a+b=0,$$

es decir, tomando c como variable libre, si y solo si $p(X) = \frac{c}{2}X^2 - cX + c$.

(c) $\boxed{\dim(\operatorname{Im} T) = 2.}$

Sabemos que $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim P_2 - \dim(\ker T) = 3 - 1 = 2$.

Problema 4. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{matrix} x - 2y + 3z + 2w = 0, \\ x + y - 9z - 4w = 0 \end{matrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ y sea $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Sin prueba puede usar que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre $\dim H$.

4 pts. (b) Encuentre una base ortonormal para H.

3 pts. (c) Encuentre una base para $H^\perp$.

2 pts. (d) Escribe $\vec{a}$ como suma $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$ donde $\vec{u}$ es paralelo a H y $\vec{w}$ es perpendicular a H.

2 pts. (e) Denotamos por P_H la proyección ortogonal sobre H. Encuentre un vector $\vec{b}$ diferente de $\vec{a}$ tal que $P_H\vec{b} = P_H\vec{a}$.

Solución.

(a) $\boxed{\dim H = 2 \text{ y una base para } H \text{ es } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

$$H = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -9 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & -12 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

No es necesario calcular ya una base para H. Del último paso de Gauß-Jordan se ve que quedan 2 variables libres. Por lo tanto la dimensión de H es 2.

(b) Una base ortogonal para H es $\vec{v}$, $\vec{w}'$ con
$\vec{w}' = \vec{w} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \vec{w} - \frac{18}{9}\vec{v} = \vec{w} - 2\vec{v} = (5-4,\ 4-4,\ 1,\ 0-2)^t = (1,\ 0,\ 1,\ -2)^t$.
Por lo tanto, una base ortogonal es

$$\vec{x} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \frac{1}{\|\vec{w}'\|}\vec{w}' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) De (a) vemos que $\dim H^\perp = 4 - \dim H = 2$ y que

$$H^\perp = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) $\vec{u}$ = proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre H, por lo tanto

$$\vec{u} = \langle \vec{x}\,, \vec{a}\rangle \vec{x} + \langle \vec{y}\,, \vec{a}\rangle \vec{y} = \frac{18}{9}\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix} + \frac{6}{6}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$\vec{w} = \vec{a} - \vec{v} = \begin{pmatrix}5\\2\\9\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\4\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-2\\8\\4\end{pmatrix}.$$

(e) Para cualquier $\vec{h} \in H^{\perp}$ tenemos que $P_H(\vec{a}+\vec{h}) = P_H\vec{a}$. Entonces podemos tomar por ejemplo,

$$\vec{b} = \vec{a} + \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\2\\9\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\3\\5\\2\end{pmatrix}.$$

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

3 pts. (a) $T : P_7 \to M_{2\times 3}$ una transformación lineal tal que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{Im}(T).$$

¿Es posible que $\dim \ker(T) = 7$?

3 pts. (b) Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

Sea E el plano generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y seam $L = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$. ¿Es cierto que E es ortogonal a L?

3 pts. (c) Sea A una matriz diagonalizable $n \times n$. ¿Se sigue que A es invertible?

Solución.

(a) **No** es posible porque por la hipótesis sabemos que $\dim(\mathrm{Im}\, T) \geq 2$.
Por lo tanto $\dim(\ker T) = \dim P_7 - \dim(\mathrm{Im}\, T) \leq 8 - 2 = 6$.

(b) Sea E el plano generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y seam $L = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$. **No** es cierto que E es ortogonal a L, porque para serle deberómos tener que $\vec{v} \perp \vec{a}$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$ que obviamente es falso.

(c) Sea A una matriz diagonalizable $n \times n$. **No** se sigue que A es invertible.
Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonal, por lo tanto diagonalizable, pero no es invertible.

MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 202320, 09 de diciembre de 2023 – SOLUCIONES

Problema 1. Para un parámetro real k considere la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & k & -1 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre todos los $k \in \mathbb{R}$ tal que la matriz A_k **no** es invertible.

4 pts. (b) Encuentre la matriz inversa de A_3, es decir, la inversa de la matriz A_3 con $k = 3$.

Solución.

(a) A_k es no invertible si y solo si $\det A_k = 0$, es decir, si y solo si

$$0 = \det A_k = k^2 - 4 - [8k - 6k] = k^2 - 2k - 20 = (k-1)^2 - 5.$$

Por lo tanto, A_k no es invertible si y solo si $k = 1 \pm \sqrt{5}$.

(b) $A_3^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 14 \\ -7 & 5 & 11 \\ 6 & -4 & -9 \end{pmatrix}$ porque

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 11 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 4 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -23 & 16 & 36 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 4 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -4 & -9 \end{array}\right).$$

Problema 2. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4 pts. (a) Encuentre los valores propios de A.

4 pts. (b) Encuentre bases para los espacios propios de A y sus dimensiones.

2 pts. (c) Encuentre una matriz invertible U y una matriz diagonal D tal que $U^{-1}AU = D$.

Solución.

(a) Los valores propios de B son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 3$ porque

$$0 = \det(B - \lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(-1-\lambda) - [-4(3-\lambda)]$$
$$= (3-\lambda)\big[(4-\lambda)(-1-\lambda)+4\big] = (3-\lambda)\big[\lambda^2 - 3\lambda\big] = -\lambda(3-\lambda)^2.$$

(b) $\operatorname{Eig}_0(B) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ y $\dim \operatorname{Eig}_0(B) = 1$ porque

$$B - 0 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\operatorname{Eig}_3(B) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ $\dim \operatorname{Eig}_3(B) = 2$ porque

$$B - 3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Para $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $U = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matriz cuyas columnas son los vectores de las bases encontradas en (b) se tiene que $U^{-1}BU = D$.

Problema 3. Sea P_2 el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2 y sea $M_{2\times 2}$ el espacio de todas las matrices 2×2 con coeficientes reales. Definimos

$$T : P_2 \to M_{2\times 2}, \quad Tp = \begin{pmatrix} 0 & p'(0) - p''(0) \\ p(1) & 2p''(0) - p'(1) \end{pmatrix},$$

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (a) Demuestre que T es una transformación lineal.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (b) Encuentre la dimensión de $\ker T$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (c) Encuentre la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

Solución.

(a) Sean $p, q \in P_2$ y sea $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(p + \alpha q) &= \begin{pmatrix} 0 & (p+\alpha q)'(0) - (p+\alpha q)''(0) \\ (p+\alpha q)(1) & 2(p+\alpha q)''(0) - (p+\alpha q)'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p'(0) + \alpha q'(0) - p''(0) + \alpha q''(0) \\ p(1) + \alpha q(1) & 2p''(0) + \alpha q''(0) - p'(1) + \alpha q'(1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p'(0) - p''(0) \\ p(1) & 2p''(0) - p'(1) \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 & q'(0) - q''(0) \\ q(1) & 2q''(0) - q'(1) \end{pmatrix} = Tp + \alpha Tq. \end{aligned}$$

(b) $\boxed{\ker T = \operatorname{span}\{X^2 + 2X - 3\}, \ \dim(\ker T) = 1.}$

Para $p(X) = aX^2 + bX + c$ tenemos que $p'(X) = 2aX + b$ y $p''(X) = 2a$. Por lo tanto

$$Tp = \begin{pmatrix} 0 & b - 2a \\ a + b + c & 4a - (2a + b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b - 2a \\ a + b + c & 2a - b \end{pmatrix}.$$

Entonces $p \in \ker T$ si y solo si

$$a + b + c = 0, \quad 2a - b = 0,$$

es decir, tomando a como variable libre, si y solo si $p(X) = aX^2 + 2aX - 3a$.

(c) $\boxed{\dim(\operatorname{Im} T) = 2.}$

Sabemos que $\dim(\operatorname{Im} T) = \dim P_2 - \dim(\ker T) = 3 - 1 = 2$.

Problema 4. Sea $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} : \begin{array}{c} x + 2y - 6z + 2w = 0, \\ x - y + 9z - 4w = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$ y sea $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$ Sin prueba puede usar que H es un subespacio de $\mathbb{R}^4$.

2 pts. (a) Encuentre $\dim H$.

4 pts. (b) Encuentre una base ortonormal para H.

3 pts. (c) Encuentre una base para $H^\perp$.

2 pts. (d) Escribe $\vec{a}$ como suma $\vec{a} = \vec{u} + \vec{w}$ donde $\vec{u}$ es paralelo a H y $\vec{w}$ es perpendicular a H.

2 pts. (e) Denotamos por P_H la proyección ortogonal sobre H. Encuentre un vector $\vec{b}$ diferente de $\vec{a}$ tal que $P_H\vec{b} = P_H\vec{a}$.

Solución.

(a) $\boxed{\dim H = 2 \text{ y una base para } H \text{ es } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.}$

$$H = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 2 \\ 1 & -1 & 9 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & -3 & 15 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

No es necesario calcular ya una base para H. Del último paso de Gauß-Jordan se ve que quedan 2 variables libres. Por lo tanto la dimensión de H es 2.

(b) Una base ortogonal para H es $\vec{v}$, $\vec{w}'$ con
$\vec{w}' = \vec{w} - \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \vec{w} + \frac{18}{9}\vec{v} = (-4+4,\, 5-4,\, 1+0,\, 0+2)^t = (0,\, 1,\, 1,\, 2)^t$.
Por lo tanto, una base ortogonal es

$$\vec{x} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \frac{1}{\|\vec{w}'\|}\vec{w}' = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) De (a) vemos que $\dim H^\perp = 4 - \dim H = 2$ y que

$$H^\perp = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(d) $\vec{u} =$ proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre H, por lo tanto

$$\vec{u} = \langle \vec{x}\,, \vec{a} \rangle \vec{x} + \langle \vec{y}\,, \vec{a} \rangle \vec{y} = \frac{9}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{12}{6} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\vec{w} = \vec{a} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(e) Para cualquier $\vec{h} \in H^{\perp}$ tenemos que $P_H(\vec{a} + \vec{h}) = P_H\vec{a}$. Entonces podemos tomar por ejemplo,

$$\vec{b} = \vec{a} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y **justifique bien sus respuestas**.

3 pts. (a) $T : M_{3\times 2} \to P_7$ una transformación lineal tal que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \ker(T).$$

¿Es posible que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 5$?

3 pts. (b) Sean $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^3$.

Sea E el plano generado por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y seam $L = \{t\vec{a} : t \in \mathbb{R}\}$. ¿Es cierto que E es ortogonal a L?

3 pts. (c) Sea A una matriz simétrica $n \times n$. ¿Se sigue que A es invertible?

Solución.

(a) **No** es posible porque por la hipótesis sabemos que $\dim(\ker T) \geq 2$.
Por lo tanto $\dim(\mathrm{Im}\, T) = \dim M_{3\times 2} - \dim(\ker T) \leq 6 - 2 = 4$.

(b) Sea E el plano generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y seam $L = \{t\vec{v} : t \in \mathbb{R}\}$. **No** es cierto que E es ortogonal a L, porque para serle deberómos tener que $\vec{v} \perp \vec{a}$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$ que obviamente es falso.

(c) Sea A una matriz simétrica $n \times n$. **No** se sigue que A es invertible.
Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es simétrica, pero no es invertible.