

Examen Final 202210, 01 de junio de 2022

1	2	3	4	5	Σ
					/50

Este es un examen individual. Tiempo: 09:00-11:00 (120 min).

Problema 1. Sea $E : 2x - y + 3z = 0$ un plano en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- 2 pts. (a) Encuentre la ecuación para el plano que pasa por el punto $(9, 2, 4)$ y es paralelo a E .
- 3 pts. (b) Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el punto $(9, 2, 4)$ y es perpendicular a E .
- 3 pts. (c) Encuentre vectores \vec{a} en E y \vec{b} perpendicular a E tal que $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.
- 2 pts. (d) Encuentre la distancia del punto $(9, 2, 4)$ al plano E .

Solución.

(a) $F : 2x - y + 3z = 18 - 2 + 12 = 28$.

(b) Un vector normal al plano es $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, por lo tanto la recta que buscamos es $L = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $\vec{b} = \text{proy}_{\vec{n}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{18 - 2 + 12}{4 + 1 + 9} \vec{n} = \frac{28}{14} \vec{n} = 2\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$\vec{a} = \vec{u} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(d) $\text{dist}((9, 2, 4), E) = \|\vec{b}\| = 2\sqrt{4 + 1 + 9} = 2\sqrt{14}$.

Problema 2. Para los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ defina el plano $E = \text{gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}$ generado por ellos en \mathbb{R}^3 . Con T denotamos la reflexión con respecto a este plano.

- 2 pts. (a) Encuentre un vector normal \vec{n} para el plano E .
- 2 pts. (b) Encuentre $T\vec{v}$, $T\vec{w}$ y $T\vec{n}$.
- 3 pts. (c) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{n}\}$.
- 3 pts. (d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Solución.

(a) Un vector normal para el plano E es $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $T\vec{v} = \vec{v}$, $T\vec{w} = \vec{w}$ y $T\vec{n} = -\vec{n}$.

$$(c) A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Sea $B = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{n})$. Entonces $A_{T,\text{can}} = BA_TB^{-1}$. Calculemos B^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & | & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & | & 2/5 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -1/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} A_{T,\text{can}} = BA_TB^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6 pts.

(a) Encuentre todos los valores propios de la matriz A y dé bases para sus espacios propios.

4 pts.

(b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tales que $A = QDQ^{-1}$. (No es necesario calcular Q^{-1} .)

Solución.

(a) Polinomio característico de A (con la regla de Sarrus):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5 - \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2(5 - \lambda) - [4(5 - \lambda)] = (5 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 4] \\ &= (5 - \lambda)(3 - \lambda - 2)(3 - \lambda + 2) = (5 - \lambda)^2(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 5$.

$$A - 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 1) = \text{gen}\{\vec{v}_1\} \text{ con } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 5 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 5) = \text{gen}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\} \text{ con } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Observe que $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$, entonces una base ortonormal de $\ker(A - 5)$ es

$$\vec{w}_2 = \|\vec{v}_2\|^{-1}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_2, \quad \vec{w}_3 = \|\vec{v}_3\|^{-1}\vec{v}_3 = \vec{v}_3.$$

Luego $A = QDQ^{-1}$ si escogemos

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Para $k \in \mathbb{R}$ defina la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 1 & k & 0 \\ 3 & k & 2 \end{pmatrix}$ y sea $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 4 pts. (a) Encuentre todos los k para los que A_k no es invertible y todos los k para los que sí es invertible.
 4 pts. (b) Tome $k = 0$ y encuentre A_0^{-1} .
 2 pts. (c) Encuentre todas las soluciones de $A_0\vec{x} = \vec{b}$.

Solución.

(a) $\det A_k = 2k + 4k - [12k + 10] = -6k - 10$. Entonces: A_k es invertible si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-5/3\}$ y no es invertible se $k = -5/3$.

(b)

$$(A_0|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 5 & 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 5 & 0 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3/2 & 1/2 \end{array} \right).$$

Luego

$$A_0^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 2 & 10 & -4 \\ 0 & -15 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) La solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es

$$\vec{x} = A_0^{-1}\vec{b} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 2 & 10 & -4 \\ 0 & -15 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12/5 \\ -5/2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y justifique bien sus respuestas.

- 2 pts. (a) Encuentre dos matrices 2×2 diferentes que satisfacen $\det(3AA^tA^{-1}) = 7$.
 2 pts. (b) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que no pertenece a al espacio gen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$.
 3 pts. (c) Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyo kernel es gen $\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.
 3 pts. (d) Sea V un espacio vectorial y suponga que los vectores a, b, c son linealmente independientes en V . Definamos $x = 2a, y = a + b + c, z = b + c$. Encuentre $\dim(\text{gen}\{x, y, z\})$.

Solución.

(a) Matrices 2×2 que satisfacen $\det(3AA^tA^{-1}) = 7$ son por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7/9 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 7/9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Por ejemplo el vector que es el producto cruz de los dos vectores dados no pertenece a su espacio generado: $(-3, 6, -3)^t$.

(c) $T = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -2 & 7 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$ sirve.

(d) Sea $n := \dim(\text{gen}\{x, y, z\})$. Claramente x y y son linealmente independiente, por lo tanto $n \geq 2$. Por otro lado $\frac{1}{2}x - y + z = 0$ que implica que $n \leq 2$. En total tenemos que $n = 2$.

¡No para uso comercial!
Material elaborado por el Departamento de Matemáticas
de la Universidad de los Andes.

Examen Final 202210, 01 de junio de 2022

1	2	3	4	5	Σ
					/50

Este es un examen individual. Tiempo: 09:00-11:00 (120 min).

Problema 1. Sea $E : 3x - 2y - z = 0$ un plano en \mathbb{R}^3 y sea $\vec{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2 pts.

(a) Encuentre la ecuación para el plano que pasa por el punto $(-5, 6, 1)$ y es paralelo a E .

3 pts.

(b) Encuentre una ecuación para la recta que pasa por el punto $(-5, 6, 1)$ y es perpendicular a E .

3 pts.

(c) Encuentre vectores \vec{a} en E y \vec{b} perpendicular a E tal que $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$.

2 pts.

(d) Encuentre la distancia del punto $(-5, 6, 1)$ al plano E .

Solución.

(a) $F : 3x - 2y - z = -15 - 12 - 1 = -28$.

(b) Un vector normal al plano es $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, por lo tanto la recta que buscamos es $L = \left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

(c) $\vec{b} = \text{proy}_{\vec{n}} \vec{u} = \frac{\langle \vec{n}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{n}\|^2} \vec{n} = \frac{-15-12-1}{9+4+1} \vec{n} = -\frac{28}{14} \vec{n} = -2\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\vec{a} = \vec{u} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) $\text{dist}((-5, 6, 1), E) = \|\vec{b}\| = 2\sqrt{9+4+1} = 2\sqrt{14}$.

Problema 2. Para los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ defina el plano $E = \text{gen}\{\vec{v}, \vec{w}\}$ generado por ellos en \mathbb{R}^3 . Con T denotamos la reflexión con respecto a este plano.

2 pts.

(a) Encuentre un vector normal \vec{n} para el plano E .

2 pts.

(b) Encuentre $T\vec{v}$, $T\vec{w}$ y $T\vec{n}$.

3 pts.

(c) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\{\vec{v}, \vec{w}, \vec{n}\}$.

3 pts.

(d) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^3 .

Solución.

(a) Un vector normal para el plano E es $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $T\vec{v} = \vec{v}$, $T\vec{w} = \vec{w}$ y $T\vec{n} = -\vec{n}$.

$$(c) A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Sea $B = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{n})$. Entonces $A_{T,\text{can}} = BA_TB^{-1}$. Calculemos B^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & | & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/10 & 0 & -3/10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & | & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/10 & 0 & -3/10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3/10 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$A_{T,\text{can}} = BA_TB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} B^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -8 & 0 & -6 \\ 0 & 10 & 0 \\ -6 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Problema 3. Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

6 pts.

(a) Encuentre todos los valores propios de la matriz A y dé bases para sus espacios propios.

4 pts.

(b) Encuentre una matriz diagonal D y una matriz ortogonal Q tales que $A = QDQ^{-1}$. (No es necesario calcular Q^{-1} .)

Solución.

(a) Polinomio característico de A (con la regla de Sarrus):

$$\det(A - \lambda) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 0 & -1 \\ 0 & 4 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^2(4 - \lambda) - (4 - \lambda) = (4 - \lambda)[(5 - \lambda)^2 - 1] \\ = (4 - \lambda)(5 - \lambda - 1)(5 - \lambda + 1) = (4 - \lambda)^2(6 - \lambda).$$

Por lo tanto los valores propios son $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 4$.

$$A - 6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 6) = \text{gen}\{\vec{v}_1\} \text{ con } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A - 4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \ker(A - 4) = \text{gen}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\} \text{ con } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Observe que $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_3$, entonces una base ortonormal de $\ker(A - 4)$ es

$$\vec{w}_2 = \|\vec{v}_2\|^{-1}\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}_2, \quad \vec{w}_3 = \|\vec{v}_3\|^{-1}\vec{v}_3 = \vec{v}_3.$$

Luego $A = QDQ^{-1}$ si escogemos

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. Para $k \in \mathbb{R}$ defina la matriz $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ k & k & 3 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ y sea $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- 4 pts. (a) Encuentre todos los k para los que A_k no es invertible y todos los k para los que sí es invertible.
- 4 pts. (b) Tome $k = 0$ y encuentre A_0^{-1} .
- 2 pts. (c) Encuentre todas las soluciones de $A_0\vec{x} = \vec{b}$.

Solución.

(a) $\det A_k = 6k + 12 - [18 + 24k] = -6 - 18k$. Entonces: A_k es invertible si $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$ y no es invertible se $k = -1/3$.

(b)

$$\begin{aligned} (A_0|I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1/3 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Luego

$$A_0^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 24 & -12 \\ -3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) La solución de $A\vec{x} = \vec{b}$ es

$$\vec{x} = A_0^{-1}\vec{b} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 24 & -12 \\ -3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 30 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Problema 5. Resuelva los siguientes problemas y justifique bien sus respuestas.

- 2 pts. (a) Encuentre dos matrices 2×2 diferentes que satisfacen $\det(5A^{-1}A^tA) = 3$.
- 2 pts. (b) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ que no pertenece a al espacio gen $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$.
- 3 pts. (c) Encuentre una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuya imagen es gen $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.
- 3 pts. (d) Sea V un espacio vectorial y suponga que los vectores a, b, c son linealmente independientes en V . Definamos $x = a + b - 4c, y = a + b + c, z = 3c$. Encuentre $\dim(\text{gen}\{x, y, z\})$.

Solución.

(a) Matrices 2×2 que satisfacen $\det(5A^{-1}A^tA) = 3$ son por ejemplo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3/25 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3/25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Por ejemplo el vector que es el producto cruz de los dos vectores dados no pertenece a su espacio generado: $(7, -7, -7)^t$.

(c) $T = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sirve.

(d) Sea $n := \dim(\text{gen}\{x, y, z\})$. Claramente x y z son linealmente independiente, por lo tanto $n \geq 2$. Por otro lado $x - y + 5/3z = 0$ que implica que $n \leq 2$. En total tenemos que $n = 2$.

¡No para uso comercial!
Material elaborada por el Departamento de Matemáticas
de la Universidad de los Andes.