MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201920, 09 de diciembre de 2019

1	2	3	4	5	6	Σ
						/50

Este es un examen individual. Tiempo: 12:00-14:00 (120 min).

Problema 1. Considere la matriz $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ **y defina** $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : S\vec{x} = \vec{0}\}$**.**

4 pts. **(a) Encuentre** $\dim V$ **y una base de** V**.**

4 pts. **(b) Encuentre una base del espacio columna de** S **y su dimensión.**

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 12 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4 pts. (a) $\dim V = 2$ y una base de V es $(-4, -3, 0, -2, 1)^t$, $(-1, -2, 1, 0, 0)^t$.

4 pts. (b) La dimensión del espacio columna de S es 3, es igual a $\mathbb{R}^3$ y una base es $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (standard unit vectors).

Problema 2. Sea $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

4 pts. **(a) Calcule** TT^t **y** $\det T$**.**

2 pts. **(b) La matriz** T **representa una transformación de** $\mathbb{R}^2$ **en** $\mathbb{R}^2$ **en la base canónica. Descríbala geométricamente.**

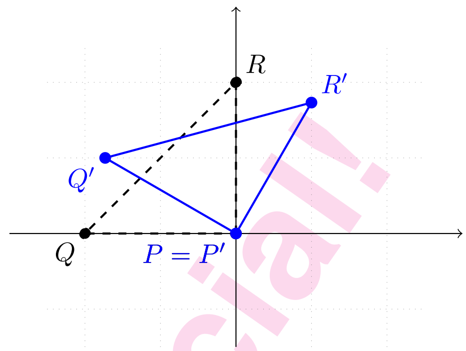
4 pts. **(c) Sea** Δ **el triangulo con vertices** $P(0,0)$**,** $Q(-1,0)$ **y** $R(0,1)$**. Haga un bosquejo de** Δ **y de su imagen bajo** T**. Encuentre los ángulos formados por los lados de la imagen de** Δ**.**

2 pts. (a) $TT^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+1 & 0 \\ 0 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det T = \frac{1}{4}(\sqrt{3}^2 + 1) = 1$.

2 pts. (b) Los resultados del literal anterior nos dicen que T es una rotación. De hecho es rotación por $-30°$.

4 pts. (c) Claramente $\sphericalangle(QPR) = 90°$ y los otros dos ángulos son $45°$. Como rotaciones no cambian ángulos, estos son también los ángulos en la imagen del Δ.



Problema 3. Sean $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}3\\5\\7\\3\end{pmatrix}$ **y** $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\4\\8\\-3\end{pmatrix}$, **vectores en** $\mathbb{R}^4$ **y sea** $U = \mathrm{gen}\{\vec{x}, \vec{y}\}$ **el subespacio vectorial generado por** $\vec{x}$ **y** $\vec{y}$**.**

4 pts. **(a) Encuentre una base ortonormal de** U**.**

2 pts. **(b) Encuentre la proyección ortogonal de** $\vec{a}$ **sobre** U**.**

2 pts. **(c) Encuentre la distancia del punto con vector posición** $\vec{a}$ **al subespacio** U**.**

4 pts. (a) Observe que $\|\vec{x}\| = \sqrt{4} = 2$. Sea $\vec{u} = \|\vec{x}\|^{-1}\vec{x}$. Ahora

$$\vec{v'} := \vec{y} - \mathrm{proy}_{\vec{x}}\,\vec{y} = \vec{y} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\|\vec{x}\|^2}\vec{x} = \vec{y} - \frac{3+5+7+3}{4}\vec{x} = \vec{y} - \frac{18}{4}\vec{x} = \vec{y} - \frac{9}{2}\vec{x} = \frac{1}{2}(2\vec{y} - 9\vec{x}) = \frac{1}{2}(-3, 1, 5, -3)^t.$$

Sea $\vec{v} = \|\vec{v}'\|^{-1}\vec{v}' = \frac{1}{\sqrt{9+1+25+9}}(-3, 1, 5, -3)^t = \frac{1}{\sqrt{44}}(-3, 1, 5, -3)^t$.
Entonces $\vec{u}, \vec{v}$ forman una base ortogonal de U.

2 pts. (b) La proyección ortogonal de $\vec{a}$ sobre U es

$$\begin{aligned}\vec{a}_{\|} &= \langle \vec{u}, \vec{a}\rangle \vec{u} + \langle \vec{v}, \vec{a}\rangle \vec{v} = \frac{1}{4}(3+4+8-3)\vec{x} + \frac{1}{44}(-9+4+40+9)(-3, 1, 5, -3)^t \\ &= 3\vec{x} + (-3, 1, 5, -3)^t = (0, 4, 8, 0)^t.\end{aligned}$$

2 pts. (c) La distancia de $\vec{a}$ de U es

$$\|\vec{a}_{\perp}\| = \|\vec{a} - \vec{a}_{\|}\| = \|(3, 0, 0, -3)^t\| = 3\|(1, 0, 0, -1)^t\| = 3\sqrt{2}.$$

Problema 4. Sea $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(a) Encuentre todos los valores de k tal que C es invertible.**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(b) Sea $k = 0$. calcule A_0^{-1}.**

$$\det C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ k & -1 & 2 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = -2k + 3k - [-3 + 4] = k - 1.$$

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (a) C es invertible si y solo si $\det C \neq 0$. Esto es el caso si y solo si $k \neq 1$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (b) Utlizando la regla de Cramer, obtenemos para $k \neq 1$:

$$B_k^{-1} = \frac{1}{k-1} \begin{pmatrix} -k-2 & 3 & 3 \\ -k^2+2 & 2k-3 & 3k-4 \\ k+1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

y para el caso especial de $k = 0$:

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5. Sea $B_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$ **para** $k \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ **(a) Encuentre todos los valores propios de la matriz B_k.**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(b) Tome $k = 3$. Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tales que $B_3 = CDC^{-1}$. (No es necesario calcular C^{-1}.)**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(c) Encuentre un $k \in \mathbb{R}$ tal que B_k no sea diagonalizable. Justifique su respuesta.**

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (a) El polinomio característico de B_k es $p_k(\lambda) = (2-\lambda)(k-\lambda)(-k-\lambda)$. Entonces todos los valores propios de la matriz B_k son $2, k - k$.

(b) Sea $k = 3$. Los autovalores de B_3 son $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = -3$. Calculemos:

- $A - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ cuyo kernel está generado por $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^t$.
- $A - 3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo kernel está generado por $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)^t$.

- $A-(-3) = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ cuyo kernel está generado por $\vec{v}_3 = (1,-5,30)^t$.

Sea $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y sea $C = (\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}$. Entonces $A = C^{-1}DC$.

3 pts. (c) Todo los k tal que B_k no sea diagonalizable, son $k \in \{0, 2, -2\}$.

Demostración.

Si $k=0$, entonces $B_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $\dim\ker(B_0 - 0) = 1 < 2 =$ multiplicidad algebraica. Por ende B_0 no es diagonalizable.

Si $k=2$, entonces $B_2 - 2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ y $\dim\ker(B_2 - 2) = 1 < 2 =$ multiplicidad algebraica. Por ende B_2 no es diagonalizable.

Si $k=-2$, entonces $B_{-2} - (-2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $\dim\ker(B_{-2} - (-2)) = 1 < 2 =$ multiplicidad algebraica. Por ende B_{-2} no es diagonalizable.

Problema 6. Resuelva las siguientes problemas y justifique sus respuestas.

2 pts. (a) **Sea $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y defina $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T\vec{x} = \vec{x} \times \vec{v}$. ¿Es 0 un valor propio de T?**

Sí porque $T\vec{v} = \vec{0} = 0\vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$.

---

2 pts. (b) **Sea L la recta $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. ¿El punto $P(4,3,2)$ pertenece a L?**

Para que $P \in L$, necesitaríamos $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$4 + t = 4, \quad 5 + 2t = 3, \quad 6 + 3t = 2$$

lo cual es claramente inconsistente: la primera igualdad daría $t = 0$ y la segunda daría $t = -1$.

---

2 pts. (c) **Sea A una matriz $n \times n$. Se sabe que su polinomio característico es $p(X) = -X^7 + 3X - 5$. ¿Cuál es el valor de n? ¿Es A invertible?**

$n = \deg p = 7$. Además $\det A = p(0) = -5 \neq 0$, por lo tanto A es invertible.

MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201920, 09 de diciembre de 2019

1	2	3	4	5	6	Σ
						/50

Este es un examen individual. Tiempo: 12:00-14:00 (120 min).

Problema 1. Considere la matriz $R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ **y defina** $V = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^5 : R\vec{x} = \vec{0}\}$**.**

4 pts. **(a) Encuentre** $\dim V$ **y una base de** V**.**

4 pts. **(b) Encuentre una base del espacio columna de** R **y su dimensión.**

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4 pts. (a) $\dim V = 3$ y una base de V es $(0,0,0,-3,1)^t,\ (-2,1,0,0,0)^t,\ (-1,0,1,0,0)^t$.

4 pts. (b) La dimensión del espacio columna de S es 2 y una base son la columnas 1 y 4 de la matriz R.

Problema 2. Sea $T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

4 pts. **(a) Calcule** T^tT **y** $\det T$**.**

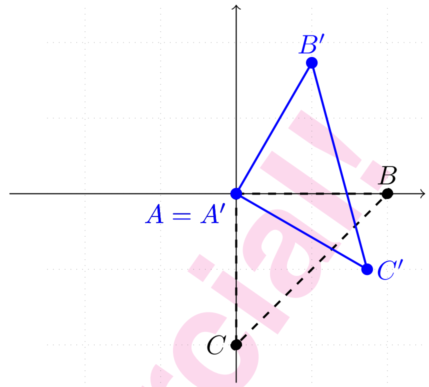
2 pts. **(b) La matriz** T **representa una transformación de** $\mathbb{R}^2$ **en** $\mathbb{R}^2$ **en la base canónica. Descríbala geométricamente.**

4 pts. **(c) Sea** Δ **el triangulo con vertices** $A(0,0)$**,** $B(1,0)$ **y** $C(0,-1)$**. Haga un bosquejo de** Δ **y de su imagen bajo** T**. Encuentre los ángulos formados por los lados de la imagen de** Δ**.**

4 pts. (a) $T^tT = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+1 & 0 \\ 0 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\det T = \frac{1}{4}(\sqrt{3}^2 + 1) = 1$.

2 pts. (b) Los resultados del literal anterior nos dicen que T es una rotación. De hecho es rotación por 60°.



$\boxed{\text{4 pts.}}$ (c) Claramente $\sphericalangle(BAC) = 90°$ y los otros dos ángulos son $45°$. Como rotaciones no cambian ángulos, estos son también los ángulos en la imagen del Δ.

Problema 3. Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$, **vectores en** $\mathbb{R}^4$ **y sea** $W = \text{gen}\{\vec{x}, \vec{y}\}$ **el subespacio vectorial generado por** $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$**.**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(a) Encuentre una base ortonormal de** W**.**

$\boxed{\text{2 pts.}}$ **(b) Encuentre la proyección ortogonal de** $\vec{x}$ **sobre** W**.**

$\boxed{\text{2 pts.}}$ **(c) Encuentre la distancia del punto con vector posición** $\vec{x}$ **al subespacio** W**.**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (a) Observe que $\|\vec{a}\| = \sqrt{25 + 9 + 1 + 1} = \sqrt{36} = 6$. Sea $\vec{u} = \|\vec{a}\|^{-1}\vec{a}$. Ahora

$$\overrightarrow{v'} := \vec{b} - \text{proy}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \vec{b} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{45 + 21 + 3 + 3}{36}\vec{a} = \vec{b} - \frac{72}{36}\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{a} = (-1, 1, 1, 1)^t.$$

Sea $\vec{v} = \|\vec{v}'\|^{-1}\vec{v}' = \frac{1}{\sqrt{4}}(-1, 1, 1, 1)^t = \frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)^t$.
Entonces $\vec{u}, \vec{v}$ forman una base ortogonal de U.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (b) La proyección ortogonal de $\vec{x}$ sobre U es

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\|} &= \langle \vec{u}, \vec{x} \rangle \vec{u} + \langle \vec{v}, \vec{x} \rangle \vec{v} = \frac{1}{36}(45 + 21 - 1 + 7)\vec{a} + \frac{1}{4}(-9 + 7 - 1 + 7)(-1, 1, 1, 1)^t \\ &= 2\vec{a} + (-1, 1, 1, 1)^t = (9, 7, 3, 3) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (c) La distancia de $\vec{a}$ de U es

$$\|\vec{x}_{\perp}\| = \|\vec{x} - \vec{x}_{\|}\| = \|(0, 0, -4, 4)^t\| = 4\|(0, 0, -1, 1)^t\| = 4\sqrt{2}.$$

Problema 4. Sea $B_k = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(a) Encuentre todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tal que B_k es invertible.**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(b) Sea $k = 0$. calcule B_0^{-1}.**

$$\det B_k = \begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} = -2k + 3k - [4 - 3] = k - 1.$$

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (a) B_k es invertible si y solo si $\det C \neq 0$. Esto es el caso si y solo si $k \neq 1$.

$\boxed{\text{4 pts.}}$ (b) Utlizando la regla de Cramer, obtenemos para $k \neq 1$:

$$B_k^{-1} = \frac{1}{k-1} \begin{pmatrix} 2k-3 & -k^2+2 & 3k-4 \\ 3 & -k-2 & 3 \\ -2 & k+1 & -2 \end{pmatrix}$$

y para el caso especial de $k = 0$:

$$B_0^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problema 5. Sea $A_k = \begin{pmatrix} -k & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ **para** $k \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{2 pts.}}$ **(a) Encuentre todos los valores propios de la matriz A_k.**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(b) Tome $k = 4$. Encuentre una matriz diagonal D y una matriz invertible C tales que $A_4 = CDC^{-1}$. (No es necesario calcular C^{-1}.)**

$\boxed{\text{4 pts.}}$ **(c) Encuentre un $k \in \mathbb{R}$ tal que A_k no sea diagonalizable. Justifique su respuesta.**

$\boxed{\text{2 pts.}}$ (a) El polinomio característico de A_k es $p_k(\lambda) = (-k - \lambda)(k - \lambda)(5 - \lambda)$. Entonces todos los valores propios de la matriz A_k son $5, k - k$.

(b) Sea $k = 4$. Los autovalores de A_4 son $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 5$.

(c) Calculemos:

- $A - (-4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ cuyo kernel está generado por $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)^t$.
- $A - 4 = \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ cuyo kernel está generado por $\vec{v}_2 = (1, 8, 0)^t$.

- $A-5=\begin{pmatrix}-9 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ cuyo kernel está generado por $\vec{v}_3=(1,9,9)^t$.

Sea $D=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ y sea $C=(\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 9\\ 0 & 8 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Entonces $A=C^{-1}DC$.

3 pts. (d) Todo los k tal que B no sea diagonalizable, son $k\in\{0,5,-5\}$.

Demostración.

Si $k=0$, entonces $B_0=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$ y $\dim\ker(B_0-0)=1<2=$ multiplicidad algebraica. Por ende B_0 no es diagonalizable.

Si $k=5$, entonces $B_5-5=\begin{pmatrix}-10 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y $\dim\ker(B_5-5)=1<2=$ multiplicidad algebraica. Por ende B_5 no es diagonalizable.

Si $k=-5$, entonces $B_{-5}-(-5)=\begin{pmatrix}10 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}$ y $\dim\ker(B_{-5}-(-5))=1<2=$ multiplicidad algebraica. Por ende B_{-5} no es diagonalizable.

Problema 6. Resuelva las siguientes problemas y justifique sus respuestas.

2 pts. (a) **Sea $\vec{w}=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ y defina $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,\ T\vec{x}=\vec{w}\times\vec{x}$. ¿Es 0 un valor propio de T?**

Sí porque $T\vec{v}=\vec{0}=0\vec{v}$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$.

---

2 pts. (b) **Sea L la recta $\left\{\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}$. ¿El punto $P(2,1,0)$ pertenece a L?**

$P\in L$, si y solo si existe $t\in\mathbb{R}$ tal que

$$4+t=2,\quad 5+2t=1,\quad 6+3t=0$$

lo cual es cierto para $t=-2$.

---

2 pts. (c) **Sea A una matriz $n\times n$. Se sabe que su polinomio característico es $p(X)=X^6+2X^2-7X$. ¿Cuál es el valor de n? ¿Es A invertible?**

$n=\deg p=6$. Además $\det A=p(0)=0$, por lo tanto A no es invertible.
