MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201910, 25 de mayo de 2019

Nombre: ______________________________ Código: ________________

1	2	3	4	Σ
				/50

Este es un examen individual. Tiempo: 12:00-14:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Considere los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ **y** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ **en** $\mathbb{R}^3$**.**

Sea $V = \operatorname{gen}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$**.**

3 pts. **(a) Demuestre que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortogonal de V y complétela con un vector $\vec{v}_3$ a una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.**

3 pts. **(b) Encuentre una base de $V^\perp$ y diga qué representan V y $V^\perp$ geométricamente.**

3 pts. **(c) Encuentre un vector $\vec{b}$ perpendicular a V y un vector $\vec{c}$ paralelo a V tal que $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.**

3 pts. **(d) Escriba $\vec{a}$ con respecto a la base encontrada en el literal (b).**

(a) Primero note que $\vec{v}_1 \not\parallel \vec{v}_2$, por lo tantos son vectores linealmente independientes y se sigue que son una base de V. Para mostrar que los vectores son ortogonales, calculamos

$$\langle \vec{v}_1 , \vec{v}_2 \rangle = 1 - 1 + 0 = 0.$$

En conclusión, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ es una base ortogonal de V.

Para completarla a una base ortogonal, caculamos

$$\vec{v}_3 := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (-3) \\ 3 - 0 \\ -1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

(b) V es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origin. $V^\perp$ es un recta perpendicular a V que pasa por el origin. Una base de $V^\perp$ es $\{\vec{v}_3\}$.

(c)

$$\vec{b} = \operatorname{proy}_{\vec{v}_3} \vec{a} = \frac{\langle \vec{v}_3 , \vec{a} \rangle}{\|\vec{v}_3\|^2} \vec{v}_3 = \frac{30 + 18 + 18}{9 + 9 + 4} \vec{v}_3 = \frac{66}{22} \vec{v}_3 = 3\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(d) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\vec{a} = \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3$. Por el literal anterior ya sabemos que $\gamma = 3$. Para α y β, observe que

$$\langle \vec{a} , \vec{v}_1 \rangle = \alpha\|\vec{v}_1\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\langle \vec{a} , \vec{v}_1 \rangle}{\|\vec{v}_1\|^2} = \frac{10 + 6 - 27}{1 + 1 + 9} = \frac{-11}{11} = -1,$$

$$\langle \vec{a} , \vec{v}_2 \rangle = \beta\|\vec{v}_2\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{\langle \vec{a} , \vec{v}_2 \rangle}{\|\vec{v}_2\|^2} = \frac{10 - 6}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Por lo tanto, en la base $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ el vector $\vec{a}$ es $(-1, 2, 3)^t$.

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \to P_2, \qquad T(p(x)) = P(x+3) - P(x).$$

2 pts. **(a) Muestre que T es una transformación lineal.**

5 pts. **(b) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$.**

2 pts. **(c) Encuentre la dimensión del kernel $\ker(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\ker(T)$.**

2 pts. **(d) Encuentre la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\mathrm{Im}(T)$.**

(a) Sean $p, q \in P_2$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(p+cq)(x) &= (p+cq)(3+x) - (p+cq)(x) = p(3+x) + cq(3+x) - p(x) - cq(x) \\ &= p(3+x) - p(x) + c[q(3+x) - q(x)] = Tp(x) + c(Tq)(x). \end{aligned}$$

(b) Calculemos

$$\begin{aligned} &Tp_1(x) = 1 - 1 = 0, \\ &Tp_2(x) = (x+3) - x = 3 = 3p_1(x), \\ &Tp_3(x) = (x+3)^2 - x^2 = 6x - 9 = -9p_1(x) + 6p_2(x). \end{aligned}$$

Entonces la representación matricial de T es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Del literal (b) se ve que $\dim \ker(A_T) = 1$ y que $\ker A_T = \mathrm{linspan}\{(1,0,0)^t\}$.
Por consiguiente, $\dim \ker(T) = 1$ y que $\ker T = \mathrm{linspan}\{p_1\}$.

(d) Del literal (b) se ve que $\dim \mathrm{Im}(A_T) = 2$ y que $\mathrm{Im}\, A_T = \mathrm{linspan}\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}$.
Por consiguiente, $\dim \mathrm{Im}(T) = 2$ y que $\mathrm{Im}\, T = \mathrm{linspan}\{p_1, p_2\}$.

Problema 3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ **y el vector** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$**.**

2 pts. **(a) Demuestre que** $\vec{x}$ **es un vector propio de la matriz** A **y diga cuál es el valor propio correspondiente.**

2 pts. **(b) Demuestre que** -2 **es un valor propio de la matriz** A**.**

3 pts. **(c) Calcule bases de los espacios propios de la matriz** A **y sus dimensiones.**

3 pts. **(d) Calcule bases ortonormales de los espacios propios de la matriz** A**.**

2 pts. **(e) Encuentre una matriz ortogonal** Q **y una matriz diagonal** D **tal que** $Q^{-1}AQ = D$**.**

(a) $\vec{x}$ es vector propio de A con valor propio 4 porque

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4+1 \\ 2+4+2 \\ 1+4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\vec{x}.$$

El valor propio es 7.

(b) -2 es valor propio de la matriz A:

$$A - (-2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{que claramente tiene kernel no trivial.}$$

(c) Del literal anterior se ve que $\dim(\mathrm{Eig}_{-2}(A)) = 2$ y que una base es $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ con $\vec{a} = (1, 0, -1)^t$ y $\vec{b} = (2, -1, 0)^t$.
Por lo tanto, $\dim(\mathrm{Eig}_4(A)) = 1$ y una base es $\vec{x}$.

(d)
- ONB de $\mathrm{Eig}_4(A)$: $\vec{y} = \|\vec{x}\|^{-1}\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{x}$.
- ONB de $\mathrm{Eig}_{-2}(A)$: Sea $\vec{b'} = \vec{b} - \mathrm{proy}_{\vec{a}}\,\vec{b} = \vec{b} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{2}{2}\vec{a} = \vec{b} - \vec{a} = (1, -1, 1)^t$.
  Entonces una ONB es $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$ con $\vec{\alpha} = \|\vec{a}\|^{-1}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^t$ y $\vec{\beta} = \|\vec{b'}\|^{-1}\vec{b'} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^t$.

$$\boxed{\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

(e) $Q = (\vec{y}\,|\,\vec{\alpha}\,|\,\vec{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(4, -2, -2).$

Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

3 pts. (a) **En $\mathbb{R}^3$ considere la recta $L : x = 2t + 2$, $y = -t + 3$, $z = 3t - 5$ con $t \in \mathbb{R}$. Encuentre dos planos π_1 y π_2 que no intersequen a L. Justifique su respuesta.**

Es fácil ver que el vector director de L es $\vec{v} = (2, -1, 3)^t$. Observe que el punto $P(2, 3, -5)$ pertenece a L (tomando $t = 0$).
Para π_1, π_2 podemos escoger cualquier plano cuyo vector normal esté perpendicular a $\vec{v}$ y que no contenga a L. Por ejemplo, el vector $\vec{n} = (1, 2, 0)$ es perpendicular a $\vec{v}$. Entonces podemos escoger $\pi_1 : x + 2y = 0$ y $\pi_2 : x + 2y = 1$. Esto ya garantiza que $L \parallel \pi_1$ y $L \parallel \pi_2$. Claramente, estos planos no contienen al punto P porque $2 + 2 \cdot 3 + 0 = 8 \neq 0$ y $\neq 1$, entonces $\pi_1 \cap L = \emptyset = \pi_2 \cap L$.

---

3 pts. (b) **Sea L la recta del literal (a). Encuentre otra recta G que no sea parelela a L y que no interseque a L. Justifique su respuesta.** Podemos escoger, por ejemplo, cualquier recta en π_1 del literal anterior, por ejemplo $G : x = 0, y = 0, z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

---

3 pts. (c) **Sea $A \in M_{3\times3}$ con $\det A = 5$. Encuentre una matriz $B \in M_{3\times3}$ tal que $\det(4A^{-1}B^2) = 4$.**

$4 = \det(4A^tB^2A) = 4^3 \det(A^{-1})(\det(B))^2 = \frac{4^3}{5} \cdot (\det B)^2$, entonces $|\det B| = \frac{\sqrt{5}}{4}$.
Por lo tanto, podemos escoger $B = \operatorname{diag}(\frac{\sqrt{5}}{4}, 0, 0)$.

---

3 pts. (d) **De una transformación lineal $T : M_{2\times4} \to \mathbb{R}^{11}$ se sabe que $\dim(\ker(T)) = 5$. Halle $\dim(\operatorname{Im}(T))$.**

$\dim(\operatorname{Im} T) = \dim(M_{2\times4}) - \dim(\ker T) = 8 - 5 = 3.$

---

3 pts. (e) **Sea M una matriz $n \times n$. Suponga que existe un vector $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que la ecuación $M\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $M\vec{x} = \vec{0}$? ¿Por qué?**

Si $M\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución, quiere decir que M no es sobreyectiva. Por lo tanto no puede ser inyectiva y $M\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.

Examen Final 201910, 25 de mayo de 2019

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1	2	3	4	Σ
				/50

Este es un examen individual. Tiempo: 12:00-14:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Considere los vectores $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **y** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ **en** $\mathbb{R}^3$**.**

Sea $W = \operatorname{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$**.**

3 pts. **(a) Demuestre que** $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ **es una base ortogonal de** W **y complétela con un vector** $\vec{w}_3$ **a una base ortogonal de** $\mathbb{R}^3$**.**

3 pts. **(b) Encuentre una base de** $W^\perp$ **y diga qué representan** W **y** $W^\perp$ **geométricamente.**

3 pts. **(c) Encuentre un vector** $\vec{y}$ **perpendicular a** W **y un vector** $\vec{z}$ **paralelo a** W **tal que** $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$**.**

3 pts. **(d) Escriba** $\vec{x}$ **con respecto a la base encontrada en el literal (b).**

(a) Primero note que $\vec{w}_1 \not\parallel \vec{w}_2$, por lo tantos son vectores linealmente independientes y se sigue que son una base de V. Para mostrar que los vectores son ortogonales, calculamos

$$\langle \vec{w}_1 \,, \vec{w}_2 \rangle = -2 + 0 + 2 = 0.$$

En conclusión, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ es una base ortogonal de V.

Para completarla a una base ortogonal, caculamos

$$\vec{w}_3 := \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-0 \\ -1-4 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En conclusión, $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

(b) W es un plano en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origin. $W^\perp$ es un recta perpendicular a W que pasa por el origin. Una base de $W^\perp$ es $\{\vec{w}_3\}$.

(c)

$$\vec{y} = \operatorname{proy}_{\vec{w}_3} \vec{a} = \frac{\langle \vec{w}_3 \,, \vec{a} \rangle}{\|\vec{w}_3\|^2}\, \vec{w}_3 = \frac{26+25+9}{4+25+1}\, \vec{w}_3 = \frac{60}{30}\, \vec{w}_3 = 2\vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{z} = \vec{a} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 13 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

(d) Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\vec{a} = \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2 + \gamma\vec{w}_3$. Por el literal anterior ya sabemos que $\gamma = 2$. Para α y β, observe que

$$\langle \vec{a} \,, \vec{w}_1 \rangle = \alpha\|\vec{w}_1\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\langle \vec{a} \,, \vec{w}_1 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} = \frac{26-5+9}{4+1+1} = \frac{30}{6} = 5,$$

$$\langle \vec{a} \,, \vec{w}_2 \rangle = \beta\|\vec{w}_2\|^2 \quad \Longrightarrow \quad \beta = \frac{\langle \vec{a} \,, \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_2\|^2} = \frac{-13+18}{1+4} = \frac{-5}{5} = -1.$$

Por lo tanto, en la base $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ el vector $\vec{a}$ es $(5, -1, 2)^t$.

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \to P_2, \qquad T(p(x)) = P(x) - P(x-5).$$

2 pts. **(a) Muestre que T es una transformación lineal.**

5 pts. **(b) Encuentre la representación matricial de T con respecto a la base $\mathcal{B}$.**

2 pts. **(c) Encuentre la dimensión del kernel $\ker(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\ker(T)$.**

2 pts. **(d) Encuentre la dimensión de $\operatorname{Im}(T)$ y encuentre polinomios que formen una base de $\operatorname{Im}(T)$.**

(a) Sean $p, q \in P_2$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} T(p+cq)(x) &= (p+cq)(x) - (p+cq)(x-5) = p(x) + cq(x) - p(x-5) - cq(x-5) \\ &= p(x) - p(3+x) + c[q(x) - q(3+x)] = Tp(x) + c(Tq)(x). \end{aligned}$$

(b) Calculemos

$$\begin{aligned} &Tp_1(x) = 1 - 1 = 0, \\ &Tp_2(x) = x - (x-5) = 5 = 5p_1(x), \\ &Tp_3(x) = x^2 - (x-5)^2 = 10x - 25 = -25p_1(x) + 10p_2(x). \end{aligned}$$

Entonces la representación matricial de T es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -25 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Del literal (b) se ve que $\dim \ker(A_T) = 1$ y que $\ker A_T = \operatorname{linspan}\{(1,0,0)^t\}$.
Por consiguiente, $\dim \ker(T) = 1$ y que $\ker T = \operatorname{linspan}\{p_1\}$.

(d) Del literal (b) se ve que $\dim \operatorname{Im}(A_T) = 2$ y que $\operatorname{Im} A_T = \operatorname{linspan}\{(1,0,0)^t, (0,1,0)^t\}$.
Por consiguiente, $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ y que $\operatorname{Im} T = \operatorname{linspan}\{p_1, p_2\}$.

Problema 3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **y el vector** $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$**.**

2 pts. **(a) Demuestre que $\vec{x}$ es un vector propio de la matriz A y diga cuál es el valor propio correspondiente.**

2 pts. **(b) Demuestre que 1 es un valor propio de la matriz A.**

3 pts. **(c) Calcule bases de los espacios propios de la matriz A y sus dimensiones.**

3 pts. **(d) Calcule bases ortonormales de los espacios propios de la matriz A.**

2 pts. **(e) Encuentre una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tal que $Q^{-1}AQ = D$.**

(a) $\vec{x}$ es vector propio de A con valor propio 7 porque

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1+4 \\ -1-2-4 \\ 2+2+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix} = 7\vec{x}.$$

El valor propio es 7.

(b) 1 es valor propio de la matriz A:

$$A - (-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{que claramente tiene kernel no trivial.}$$

(c) Del literal anterior se ve que $\dim(\mathrm{Eig}_1(A)) = 2$ y que una base es $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ con $\vec{a} = (1,1,0)^t$ y $\vec{b} = (0,2,1)^t$.
Por lo tanto, $\dim(\mathrm{Eig}_7(A)) = 1$ y una base es $\vec{v}$.

(d)
- ONB de $\mathrm{Eig}_7(A)$: $\vec{y} = \|\vec{v}\|^{-1}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{v}$.
- ONB de $\mathrm{Eig}_{-2}(A)$: Sea $\vec{b'} = \vec{b} - \mathrm{proy}_{\vec{a}}\vec{b} = \vec{b} - \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a} = \vec{b} - \frac{2}{2}\vec{a} = \vec{b} - \vec{a} = (-1,1,1)^t$.
  Entonces una ONB es $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$ con $\vec{\alpha} = \|\vec{a}\|^{-1}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t$ y $\vec{\beta} = \|\vec{b'}\|^{-1}\vec{b'} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^t$.

$$\boxed{\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.}$$

(e) $Q = (\vec{y}\,|\,\vec{\alpha}\,|\,\vec{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(7,1,1).$

Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

3 pts. (a) **En $\mathbb{R}^3$ considere la recta $L : x = t + 3,\ y = 2t - 5,\ z = 3t + 1$ con $t \in \mathbb{R}$. Encuentre dos planos π_1 y π_2 que no intersequen a L. Justifique su respuesta.**

Es fácil ver que el vector director de L es $\vec{v} = (1, 2, 3)^t$. Observe que el punto $P(3, -5, 1)$ pertenece a L (tomando $t = 0$).
Para π_1, π_2 podemos escoger cualquier plano cuyo vector normal esté perpendicular a $\vec{v}$ y que no contenga a L. Por ejemplo, el vector $\vec{n} = (-2, 1, 0)$ es perpendicular a $\vec{v}$. Entonces podemos escoger $\pi_1 : -2x + y = 0$ y $\pi_2 : -2x + y = 1$. Esto ya garantiza que $L \parallel \pi_1$ y $L \parallel \pi_2$. Claramente, estos planos no contienen al punto P porque $-6 - 5 = -11 \neq 0$ y $\neq 1$, entonces $\pi_1 \cap L = \emptyset = \pi_2 \cap L$.

---

3 pts. (b) **Sea L la recta del literal (a). Encuentre otra recta H que no sea parelela a L y que no interseque a L. Justifique su respuesta.**

Podemos escoger, por ejemplo, cualquier recta en π_1 del literal anterior, por ejemplo $G : x = 0, y = 0, z = t$ con $t \in \mathbb{R}$.

---

3 pts. (c) **Sea $R \in M_{3\times 3}$ con $\det R = 4$. Encuentre una matriz $S \in M_{3\times 3}$ tal que $\det(2SR^tS) = 14$.**

$14 = \det(2SRS^t) = 2^3 \det(S) \det(R) \det(S^t) = 8(\det(S))^2 \det(R) = 8 \cdot 4 \cdot (\det S)^2$, entonces
$|\det S| = \sqrt{\frac{14}{32}} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Por lo tanto, podemos escoger $B = \operatorname{diag}\left(\frac{\sqrt{7}}{4}, 0, 0\right)$.

---

3 pts. (d) **De una transformación lineal $T : \mathbb{R}^7 \to M_{4\times 3}$ se sabe que $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 2$. Halle $\dim(\ker(T))$.**

$\dim(\ker T) = \dim(\mathbb{R}^7) - \dim(\operatorname{Im} T) = 7 - 2 = 5.$

---

3 pts. (e) **Sea A una matriz $n \times n$. Suponga que existe un vector $\vec{b}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $A\vec{x} = \vec{0}$? ¿Por qué?**

Si $A\vec{x} = \vec{b}$ no tiene solución, quiere decir que A no es sobreyectiva. Por lo tanto no puede ser inyectiva y $A\vec{x} = \vec{0}$ tiene infinitas soluciones.