

Examen Final 201820, 04 de diciembre de 2018

NOMBRE: _____

CÓDIGO: _____

1	2	3	4	Σ
				/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.

Tiempo: 7:00-9:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectores en \mathbb{R}^4 y sea $W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ el subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 generado por \vec{w}_1 y \vec{w}_2 .

4 pts. (a) Usando el proceso de Gram-Schmidt, encuentre una base ortonormal de W .

$$\text{Sea } \vec{u} := \vec{w}_2 - \text{proy}_{\vec{w}_1} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 = \vec{w}_2 - \frac{1+6+2}{9} \vec{w}_1 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces una base ortonormal de W es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ donde

$$\vec{v}_1 = \|\vec{w}_1\|^{-1} \vec{w}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \|\vec{u}\|^{-1} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4 pts. (b) Encuentre una base para W^\perp .

$$W^\perp = \ker \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto una base de W^\perp es

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4 pts. (c) Encuentre las proyecciones ortogonales de \vec{a} sobre W y sobre W^\perp .

$$\vec{a}_\parallel = \text{proy}_W \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{a}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 = \frac{9}{3} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \rightarrow P_2, \quad T(p(x)) = (5x + 1)p'(x).$$

- 4 pts. (a) **Muestre que T es una transformación lineal y encuentre su representación matricial con respecto a la base \mathcal{B} .** Linealidad de T : Para todo $p, q \in P_2$ y $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (T(p + cq))(x) &= (5x + 1)(p + cq)'(x) = (5x + 1)(p' + cq')(x) = (5x + 1)p'(x) + c(5x + 1)q'(x) \\ &= (Tp)(x) + (Tq)(x). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} (Tp_1)(x) &= 0, \\ (Tp_2)(x) &= 5x + 1 = 5p_2(x) + p_1(x), \\ (Tp_3)(x) &= 10x^2 + 2x = 10p_3(x) + 2p_2(x), \end{aligned}$$

por lo tanto la representación matricial de T con respecto a la base \mathcal{B} es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

- 4 pts. (b) **Encuentre una base de $\ker T$ y la dimensión de $\ker T$.** Es claro que la forma reducida esca-

lonada de A_T es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\dim(\ker T) = \dim(\ker A_T) = 1$ y $\ker A_T = \text{gen}\{(1, 0, 0)^t\}$ y por consiguiente $\ker T = \text{gen}\{p_1\}$.

- 4 pts. (c) **Encuentre una base de $\text{Im } T$ y la dimensión de $\text{Im } T$.**

De la forma reducida escalonada de A_T se ve que $\dim(\text{Im } A_T) = 2$ y

$$\text{Im } A_T = C_A = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

y por consiguiente

$$\text{Im } T = \text{gen}\{p_1 + 5p_2, p_2 + 5p_3\}.$$

- 2 pts. (d) **Diga si T es invertible. Si lo es, encuentre su inversa. Justifique su respuesta.**

En (b) se mostró que $\ker T \neq \{0\}$, por lo tanto T no es invertible.

- 2 pts. (e) **Sea $q(x) = 5x^2 + 6x + 1$. Determine si $q \in \ker T$ y si $q \in \text{Im } T$.**

- q no es múltiplo de p_1 , por lo tanto $q \notin \text{gen}\{p_1\} = \ker T$.
- $q = (p_1 + 5p_2) + (p_2 + 5p_3) \in \text{gen}\{p_1 + 5p_2, p_2 + 5p_3\} = \text{Im } T$.

Problema 3. Considere la ecuación

$$13x^2 + 7y^2 + 8xy = 3. \quad (*)$$

2 pts. (a) **Escriba la ecuación en forma matricial.**

Sea $G = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. Entonces $(*)$ es equivalente a

$$\left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 3. \quad (**)$$

6 pts. (b) **Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática $(*)$ de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Debe dar fórmulas explícitas para las nuevas variables en términos de las variables originales x y y .**

Valores propios de A son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 15$ porque

$$0 = \det(G - \lambda) = (13 - \lambda)(7 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 10)^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda - 15).$$

Vectores propios:

$$G - \lambda_1 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$G - \lambda_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Sean

$$Q = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix},$$

entonces $Q^{-1} = Q^t$ y $D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$. Si definimos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix},$$

entonces $(**)$ da

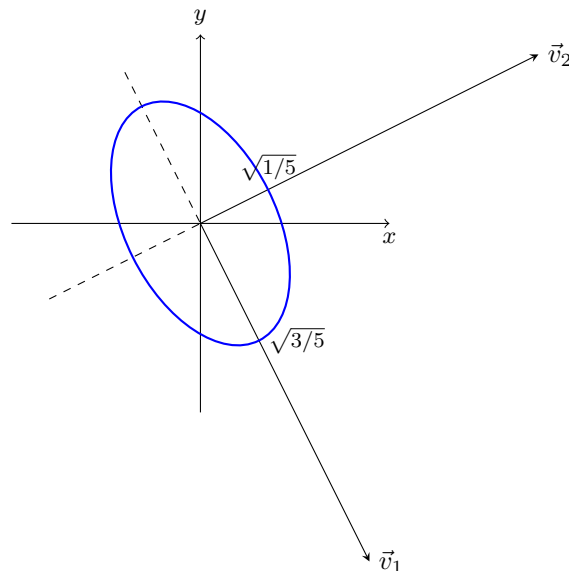
$$3 = \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle DQ^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle,$$

por lo tanto

$$3 = 5x'^2 + 15y'^2 = (x - 2y)^2 + 3(2x + y)^2.$$

4 pts. (c) **Diga cuál forma geométrica describe la ecuación $(*)$. Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.**

Las soluciones de la ecuación $(*)$ caen sobre un elipse cuyos ejes principales son paralelos a los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .



Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

- 2 pts. (a) **En \mathbb{R}^3 considere el plano $P : 5x + y - 3z = 2$ y la recta L que pasa por los puntos $A(1, 0, 3)$ y $B(4, 5, 6)$. Diga si P y L son perpendiculares.**

Vector director de L : $\vec{v} = \vec{AB} = (3, 5, 3)^t$, vector normal del plano P : $\vec{n} = (5, 1, -3)^t$. Dado que \vec{v} y \vec{n} no son paralelos, se concluye que L y P no son perpendiculares.

- 2 pts. (b) **¿Es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$ un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 ?**

Denota $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$. Claramente $\vec{v} = (0, 0, -1)^t \in U$, sin embargo $-\vec{v} = (0, 0, 1) \notin U$. Por lo tanto U no es un espacio vectorial.

- 2 pts. (c) **Sean $B, C \in M_{3 \times 3}$ con $\det B = 5$ y $\det C = 2$. Encuentre $\det(4B^{-2}(C^t)^3)$.**

$$\det(4B^{-2}(C^t)^3) = 4^3(\det B)^{-2}(\det C)^3 = \frac{4^3 2^3}{5^2} = \frac{512}{25}.$$

- 2 pts. (d) **¿Existe una transformación lineal $T : M_{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^4$ con $\dim(\ker T) = 4$?**

No, porque $\dim(\ker T) = \dim M_{3 \times 3} - \dim(\text{Im } T) \geq \dim M_{3 \times 3} - \dim(\mathbb{R}^4) = 9 - 4 = 5 > 4$.

- 2 pts. (e) **Se sabe que una matriz $A \in M_{n \times n}$ cumple la ecuación $A^2 - 5A = 3\text{Id}$ (donde Id es la matriz identidad). ¿Se puede concluir que A es invertible?**

Sí porque $\text{Id} = \frac{1}{3}(A^2 - 5A) = \frac{1}{3}A(A - 5)$. Entonces A es invertible con inversa $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 5)$.

Examen Final 201820, 04 de diciembre de 2018

NOMBRE: _____

CÓDIGO: _____

1	2	3	4	Σ
				/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada el procedimiento completo que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.

Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.

Tiempo: 7:00-9:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ vectores en \mathbb{R}^4 y sea $W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ el subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 generado por \vec{w}_1 y \vec{w}_2 .

4 pts. (a) Usando el proceso de Gram-Schmidt, encuentre una base ortonormal de W .

$$\text{Sea } \vec{u} := \vec{w}_2 - \text{proy}_{\vec{w}_1} \vec{w}_2 = \vec{w}_2 - \frac{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle}{\|\vec{w}_1\|^2} \vec{w}_1 = \vec{w}_2 - \frac{3+4+2}{9} \vec{w}_1 = \vec{w}_2 - \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Entonces una base ortonormal de W es $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ donde

$$\vec{v}_1 = \|\vec{w}_1\|^{-1} \vec{w}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \|\vec{u}\|^{-1} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

4 pts. (b) Encuentre una base para W^\perp .

$$W^\perp = \ker \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

por lo tanto una base de W^\perp es

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4 pts. (c) Encuentre las proyecciones ortogonales de \vec{a} sobre W y sobre W^\perp .

$$\vec{a}_\parallel = \text{proy}_W \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{v}_1 \rangle \vec{v}_1 + \langle \vec{a}, \vec{v}_2 \rangle \vec{v}_2 = \frac{2}{3} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{14}{\sqrt{14}} \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 27 \\ -5 \end{pmatrix},$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 27 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \\ 22 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \rightarrow P_2, \quad T(p(x)) = (x + 3)p'(x).$$

- 4 pts. (a) Muestre que T es una transformación lineal y encuentre su representación matricial con respecto a la base \mathcal{B} .

Linealidad de T : Para todo $p, q \in P_2$ y $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (T(p + cq))(x) &= (x + 3)(p + cq)'(x) = (x + 3)(p' + cq')(x) = (x + 3)p'(x) + c(x + 3)q'(x) \\ &= (Tp)(x) + (Tq)(x). \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} (Tp_1)(x) &= 0, \\ (Tp_2)(x) &= x + 3 = p_2(x) + 3p_1(x), \\ (Tp_3)(x) &= 2x^2 + 6x = 2p_3(x) + 6p_2(x), \end{aligned}$$

por lo tanto la representación matricial de T con respecto a la base \mathcal{B} es

$$A_T = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- 4 pts. (b) Encuentre una base de $\ker T$ y la dimensión de $\ker T$. Es claro que la forma reducida escalonada de A_T es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto $\dim(\ker T) = \dim(\ker A_T) = 1$ y $\ker A_T = \text{gen}\{(1, 0, 0)^t\}$ y por consiguiente $\ker T = \text{gen}\{p_1\}$.

- 4 pts. (c) Encuentre una base de $\text{Im } T$ y la dimensión de $\text{Im } T$.

De la forma reducida escalonada de A_T se ve que $\dim(\text{Im } A_T) = 2$ y

$$\text{Im } A_T = C_A = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y por consiguiente

$$\text{Im } T = \text{gen}\{3p_1 + p_2, 3p_2 + p_3\}.$$

- 2 pts. (d) Diga si T es invertible. Si lo es, encuentre su inversa. Justifique su respuesta.

En (b) se mostró que $\ker T \neq \{0\}$, por lo tanto T no es invertible.

- 2 pts. (e) Sea $q(x) = 3x^2 + 4x + 1$. Determine si $q \in \ker T$ y si $q \in \text{Im } T$.

- q no es múltiplo de p_1 , por lo tanto $q \notin \text{gen}\{p_1\} = \ker T$.
- $q = (3p_1 + p_2) + (3p_2 + p_3) \in \text{gen}\{3p_1 + p_2, 3p_2 + p_3\} = \text{Im } T$.

Problema 3. Considere la ecuación

$$7x^2 + 13y^2 - 8xy = 4. \quad (*)$$

2 pts. (a) **Escriba la ecuación en forma matricial.**

Sea $G = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 13 \end{pmatrix}$. Entonces $(*)$ es equivalente a

$$\left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 4. \quad (**)$$

6 pts. (b) **Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática $(*)$ de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Debe dar fórmulas explícitas para las nuevas variables en términos de las variables originales x y y .**

Valores propios de A son $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = 15$ porque

$$0 = \det(G - \lambda) = (7 - \lambda)(13 - \lambda) - 16 = \lambda^2 - 20\lambda + 75 = (\lambda - 10)^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda - 15).$$

Vectores propios:

$$G - \lambda_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$G - \lambda_2 = \begin{pmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

Sean

$$Q = (\vec{v}_1 | \vec{v}_2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix},$$

entonces $Q^{-1} = Q^t$ y $D = Q^{-1}AQ = Q^tAQ$. Si definimos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix},$$

entonces $(**)$ da

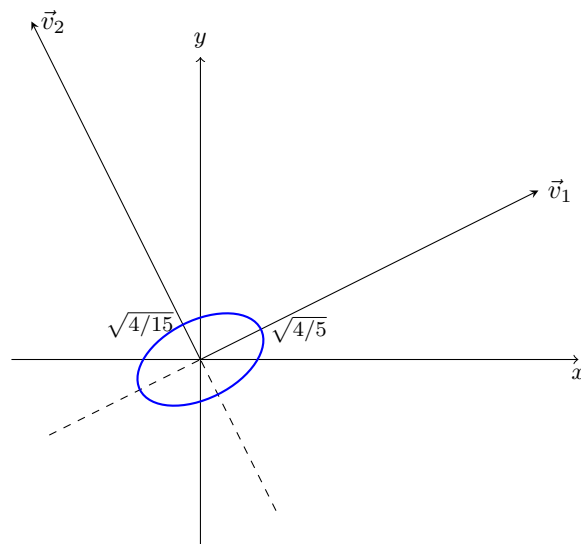
$$4 = \left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle DQ^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, Q^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle,$$

por lo tanto

$$4 = 5x'^2 + 15y'^2 = (2x + y)^2 + 3(-x + 2y)^2.$$

4 pts. (c) **Diga cuál forma geométrica describe la ecuación $(*)$. Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.**

Las soluciones de la ecuación $(*)$ caen sobre un elipse cuyos ejes principales son paralelos a los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 .



Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

- 2 pts. (a) En \mathbb{R}^3 considere el plano $P : x - 2y + 7z = 3$ y la recta L que pasa por los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(3, 0, 2)$. Diga si P y L son paralelos.

Vector director de L : $\vec{v} = \vec{AB} = (2, -2, -1)^t$, vector normal del plano P : $\vec{n} = (1, -2, 7)^t$. Dado que $\langle \vec{v}, \vec{n} \rangle = -1 \neq 0$, se concluye que L y P no son paralelos.

- 2 pts. (b) ¿Es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$ un subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 ?

Denota $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$. Claramente $\vec{v} = (0, 1, 0)^t \in U$, sin embargo $-\vec{v} = (0, -1, 1) \notin U$. Por lo tanto U no es un espacio vectorial.

- 2 pts. (c) Sean $A, B \in M_{3 \times 3}$ con $\det A = 2$ y $\det B = 3$. Encuentre $\det(5(A^3)^t B^{-2})$.

$$\det(5(A^3)^t B^{-2}) = 5^3 (\det A)^3 (\det B)^{-2} = \frac{5^3 2^3}{3^2} = \frac{1000}{9}.$$

- 2 pts. (d) ¿Existe una transformación lineal $T : M_{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^4$ con $\dim(\ker T) = 3$?

No, porque $\dim(\ker T) = \dim M_{3 \times 3} - \dim(\text{Im } T) \geq \dim M_{3 \times 3} - \dim(\mathbb{R}^3) = 9 - 3 = 6 > 4$.

- 2 pts. (e) Se sabe que una matriz $C \in M_{n \times n}$ cumple la ecuación $C^2 - 3C = 2\text{Id}$ (donde Id es la matriz identidad). ¿Se puede concluir que C es invertible?

Sí porque $\text{Id} = \frac{1}{2}(C^2 - 3C) = \frac{1}{2}C(C - 3)$. Entonces C es invertible con inversa $C^{-1} = \frac{1}{2}(C - 3)$.