MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201820, 04 de diciembre de 2018

NOMBRE: ____________________________ CÓDIGO: ______________

1	2	3	4	Σ
				/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 7:00-9:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^4$ y sea $W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$.

4 pts. (a) Usando el proceso de Gram-Schmidt, encuentre una base ortonormal de W.

4 pts. (b) Encuentre una base para $W^\perp$.

4 pts. (c) Encuentre las proyecciones ortogonales de $\vec{a}$ sobre W y sobre $W^\perp$.

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \to P_2, \qquad T(p(x)) = (5x+1)p'(x).$$

4 pts. (a) Muestre que T es una transformación lineal y encuentre su representación matricial con respecto a la base $\mathcal{B}$.

4 pts. (b) Encuentre una base de $\ker T$ y la dimensión de $\ker T$.

4 pts. (c) Encuentre una base de $\operatorname{Im} T$ y la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

2 pts. (d) Diga si T es invertible. Si lo es, encuentre su inversa. Justifique su respuesta.

2 pts. (e) Sea $q(x) = 5x^2 + 6x + 1$. Determine si $q \in \ker T$ y si $q \in \operatorname{Im} T$.

Problema 3. Considere la ecuación

$$13x^2 + 7y^2 + 8xy = 3. \qquad (*)$$

2 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.

6 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática $(*)$ de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Debe dar fórmulas explcitas para las nuevas variables en términos de las variables originales x y y.

4 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación $(*)$. Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

2 pts. (a) En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $P : 5x + y - 3z = 2$ y la recta L que pasa por los puntos $A(1, 0, 3)$ y $B(4, 5, 6)$. Diga si P y L son perpendiculares.

2 pts. (b) ¿Es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

2 pts. (c) Sean $B, C \in M_{3\times 3}$ con $\det B = 5$ y $\det C = 2$. Encuentre $\det(4B^{-2}(C^t)^3)$.

2 pts. (d) ¿Existe una transformación lineal $T : M_{3\times 3} \to \mathbb{R}^4$ con $\dim(\ker T) = 4$?

2 pts. (e) Se sabe que una matriz $A \in M_{n\times n}$ cumple la ecuación $A^2 - 5A = 3\,\mathrm{Id}$ (donde Id es la matriz identidad). ¿Se puede concluír que A es invertible?

MATE-1105: Álgebra lineal

Examen Final 201820, 04 de diciembre de 2018

Nombre: ______________________________ Código: ______________

1	2	3	4	Σ
				/50

Este es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.
Tiempo: 7:00-9:00 (120 min).

¡Éxito!

Problema 1. Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\2\end{pmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix}3\\2\\3\\1\end{pmatrix}$ y $\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\0\\5\\1\end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^4$ y sea $W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$.

4 pts. (a) Usando el proceso de Gram-Schmidt, encuentre una base ortonormal de W.

4 pts. (b) Encuentre una base para $W^\perp$.

4 pts. (c) Encuentre las proyecciones ortogonales de $\vec{a}$ sobre W y sobre $W^\perp$.

Problema 2. Sea P_2 el espacio de los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ base de P_2 con $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$, $p_3(x) = x^2$ (no tiene que probar que es una base). Considere la transformación lineal

$$T : P_2 \to P_2, \qquad T(p(x)) = (x+3)p'(x).$$

4 pts. (a) Muestre que T es una transformación lineal y encuentre su representación matricial con respecto a la base $\mathcal{B}$.

4 pts. (b) Encuentre una base de $\ker T$ y la dimensión de $\ker T$.

4 pts. (c) Encuentre una base de $\operatorname{Im} T$ y la dimensión de $\operatorname{Im} T$.

2 pts. (d) Diga si T es invertible. Si lo es, encuentre su inversa. Justifique su respuesta.

2 pts. (e) Sea $q(x) = 3x^2 + 4x + 1$. Determine si $q \in \ker T$ y si $q \in \operatorname{Im} T$.

Problema 3. Considere la ecuación

$$7x^2 + 13y^2 - 8xy = 4. \qquad (*)$$

2 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.

6 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática $(*)$ de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Debe dar fórmulas explcitas para las nuevas variables en términos de las variables originales x y y.

4 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación $(*)$. Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

Problema 4. Responda a las siguientes preguntas. Justifique claramente sus respuestas.

2 pts. (a) En $\mathbb{R}^3$ considere el plano $P : x - 2y + 7z = 3$ y la recta L que pasa por los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(3, 0, 2)$. Diga si P y L son paralelos.

2 pts. (b) ¿Es $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

2 pts. (c) Sean $A, B \in M_{3\times3}$ con $\det A = 2$ y $\det B = 3$. Encuentre $\det(5(A^3)^t B^{-2})$.

2 pts. (d) ¿Existe una transformación lineal $T : M_{3\times3} \to \mathbb{R}^4$ con $\dim(\ker T) = 3$?

2 pts. (e) Se sabe que una matriz $C \in M_{n\times n}$ cumple la ecuación $C^2 - 3C = 2\,\mathrm{Id}$ (donde Id es la matriz identidad). ¿Se puede concluír que C es invertible?