MATE-1105: Álgebra lineal

**Examen Final 201810, 29 de mayo de 2018**

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ___________ SEC. COMPL.: ______

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | /50 |

*Esto es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma* clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
*Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.*
*Tiempo: 7:00-9:00 (120 min).*

**¡Éxito!**

**Problema 1.** Considere el plano $\pi : 3x - y + 2z = 5$ y el punto $Q(-2, 3, 0)$.

4 pts. (a) Encuentre la ecuación de una recta $L$ que sea perpendicular a $\pi$ y contenga al punto $Q$.
4 pts. (b) Encuentre el punto de interseccin entre $\pi$ y la recta $L$ hallada en (a).
3 pts. (c) Encuentre la distancia de $Q$ al plano $\pi$.

**Problema 2.** Sean $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ y $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^4$ y sea $W = \text{gen}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por $\vec{w}_1$ y $\vec{w}_2$.

10 pts. (a) Encuentre una base para $W^\perp$.
2 pts. (b) Encuentre un vector $\vec{a} \in \mathbb{R}^4$ que no pertenezca ni a $W$ ni a $W^\perp$.

5 pts. **Problema 3.** Sea $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ los vectores unitarios estandar en $\mathbb{R}^2$. Se sabe que la representación de $\vec{e}_1$ en la base $B$ es $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ y la de $\vec{e}_2$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}_B$. Encuentre $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$.

**Problema 4.** Considere la ecuación

$$2x^2 + 5y^2 + 4xy = 3. \tag{$*$}$$

4 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.
4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática ($*$) de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.
4 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación ($*$). Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

**Problema 5.** Responda a las siguientes preguntas. Justifique sus repuestas bien.

En lo siguiente, $M_{n\times n}$ denota el conjunto de todas las matrices $n \times n$ con entradas reales, y $P_n$ denota el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a $n$ con coeficientes reales.

3 pts. (a) Sea $A \in M_{n\times n}$ una matriz invertible. ¿Es posible que $\lambda = 0$ sea un autovalor de $A$?
3 pts. (b) Sea $B \in M_{2\times 2}$ una matriz dada. ¿Es $U = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^2 : B\vec{v} = \vec{v}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^2$?
2 pts. (c) Dé una transformación lineal $A : P_3 \to M_{3\times 3}$ con $\dim(\ker A) = 0$.
2 pts. (d) ¿Existe una transformación lineal $B : P_3 \to M_{3\times 3}$ con $\dim(\ker B) = 5$?

MATE-1105: Álgebra lineal

**Examen Final 201810, 29 de mayo de 2018**

NOMBRE: ______________________________ CÓDIGO: ___________ SEC. COMPL.: ______

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | /50 |

*Esto es un examen individual. Para obtener el máximo puntaje en cada problema, además de tener la respuesta correcta, usted debe presentar de forma* clara y ordenada *el procedimiento* completo *que permite llegar a la respuesta. Si usa algún teorema, explique claramente cuál es y por qué es aplicable.*
*Devuelva esta hoja con todas las hojas que haya utilizado. Escriba su nombre en cada hoja que haya utilizado.*
*Tiempo: 7:00-9:00 (120 min).*

**¡Éxito!**

**Problema 1.** Considere el plano $\pi : x - 2y + 3z = 4$ y el punto $Q(-1, 8, -7)$.

4 pts. (a) Encuentre la ecuación de una recta $L$ que sea perpendicular a $\pi$ y contenga al punto $Q$.

4 pts. (b) Encuentre el punto de interseccin entre $\pi$ y la recta $L$ hallada en (a).

3 pts. (c) Encuentre la distancia de $Q$ al plano $\pi$.

**Problema 2.** Sean $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$ vectores en $\mathbb{R}^4$ y sea $U = \text{gen}\{\vec{a}, \vec{b}\}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ l generado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

10 pts. (a) Encuentre una base para $U^\perp$.

2 pts. (b) Encuentre un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^4$ que no pertenezca ni a $U$ ni a $U^\perp$.

5 pts. **Problema 3.** Sea $B = \{\vec{b}_1, \ \vec{b}_2\}$ una base de $\mathbb{R}^2$ y sean $\vec{\mathrm{e}}_1, \vec{\mathrm{e}}_2$ los vectores unitarios estandar en $\mathbb{R}^2$. Se sabe que la representación de $\vec{\mathrm{e}}_1$ en la base $B$ es $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}_B$ y la de $\vec{\mathrm{e}}_2$ es $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}_B$. Encuentre $\vec{b}_1$ y $\vec{b}_2$.

**Problema 4.** Considere la ecuación

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 6. \qquad (*)$$

4 pts. (a) Escriba la ecuación en forma matricial.

4 pts. (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática $(*)$ de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto.

4 pts. (c) Diga cuál forma geométrica describe la ecuación $(*)$. Haga un dibujo de ella e indique los ejes principales.

**Problema 5.** Responda a las siguientes preguntas. Justifique sus repuestas bien.

En lo siguiente, $M_{n\times n}$ denota el conjunto de todas las matrices $n \times n$ con entradas reales, y $P_n$ denota el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a $n$ con coeficientes reales.

3 pts. (a) Sean $A, B \in M_{n\times n}$ tales que $AB$ es invertible. ¿Se puede asegurar que $A$ y $B$ también lo son?

3 pts. (b) Sea $v \in \mathbb{R}^3$ un vector dado. ¿Es $U = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^3 : \vec{w} \times \vec{v} = \vec{0}\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

2 pts. (c) Dé una transformación lineal $S : M_{2\times 2} \to P_8$ con $\dim(\operatorname{Im} S) = 0$.

2 pts. (d) ¿Existe una transformación lineal $T : M_{2\times 2} \to P_8$ con $\dim(\operatorname{Im} T) = 5$?