Álgebra Lineal
Nombre/Código: Diciembre 1 2017

Examen Final - Tema A

Instrucciones: Durante el examen no son permitidos junto a usted libros, notas, calculadoras, celulares o en general dispositivos electrónicos de cualquier tipo así estén apagados. **LA RESPUESTA A CADA PROBLEMA DEBE SER ESCRITA DE MANERA CLARA**. Muestre cada paso de su solución; **NO JUSTIFICACIÓN = NO PUNTAJE**, aun si la respuesta dada es correcta.

Problemas	Puntuación
1 /10pts	
2 /10pts	
3 /10pts	
4 /10pts	
5 /10pts	
Total: /50pts	

Tiempo 2 Horas

1. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

   (a) ¿Es la matriz A invertible? En caso que sí encuentre su inversa A^{-1}.

   (b) Encuentre todas la soluciones al sistema de ecuaciones

   $$\begin{array}{ccccccc} x & + & & + & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & & + & 5z & = & 0. \end{array}$$

   (c) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo asociado al sistema del punto (b)? (Justifique su respuesta)

2. Considere el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por $T(\vec{u}) = \vec{u} \times \vec{v}$.

   (a) Muestre que T es una transformación lineal.(*Puede utilizar las propiedades del producto cruz.*)

   (b) Halle la matriz de representación de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Halle una base para el espacio nulo de T. ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo de T?

   (d) Halle una base para la imagen de T. ¿Cuál es la dimensión de la imagen de T?

3. Sean $W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ y $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Muestre que W es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Encuentre una base ortonormal para W.

   (c) Encuentre una base ortonormal para $W^\perp$.

   (d) Escriba $\vec{v}$ en la forma $\vec{v} = \vec{v}_W + \vec{v}_{W^\perp}$ donde $\vec{v}_W \in W$ y $\vec{v}_{W^\perp} \in W^\perp$

4. Sea A una matriz de 3×3 con valores propios $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 1$ cuyos vectores propios respectivos son $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

   (a) ¿Es A invertible?

   (b) ¿Es A diagonalizable?

   (c) Calcule el vector $A^{2017}\vec{v_2}$.

5. Considere la cónica dada por la ecuación cuadrática $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 1$. Sea $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

   (a) Escriba la ecuación en la forma $A\vec{X} \cdot \vec{X} = 1$ donde A es una matriz simétrica.

   (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Escriba la ecuación en las nuevas variables, dibuje la cónica obtenida en el plano xy e identifique los ejes principales del cambio de variables.

Álgebra Lineal
Nombre/Código: Diciembre 1 2017

Examen Final - Tema B

Instrucciones: Durante el examen no son permitidos junto a usted libros, notas, calculadoras, celulares o en general dispositivos electrónicos de cualquier tipo así estén apagados. **LA RESPUESTA A CADA PROBLEMA DEBE SER ESCRITA DE MANERA CLARA**. Muestre cada paso de su solución; **NO JUSTIFICACIÓN = NO PUNTAJE**, aun si la respuesta dada es correcta.

Problemas	Puntuación
1 /10pts	
2 /10pts	
3 /10pts	
4 /10pts	
5 /10pts	
Total: /50pts	

Tiempo 2 Horas

1. Considere la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

   (a) ¿Es la matriz B invertible? En caso que sí encuentre su inversa B^{-1}.

   (b) Encuentre todas la soluciones al sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & & + & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & & + & 7z & = & 1. \end{array}$$

   (c) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema homogéneo asociado al sistema del punto (b)? (Justifique su respuesta)

2. Considere el vector $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Sea $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la función definida por $S(\vec{u}) = \vec{u} \times \vec{v}$.

   (a) Muestre que S es una transformación lineal.(*Puede utilizar las propiedades del producto cruz.*)

   (b) Halle la matriz de representación de S con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   (c) Halle una base para el espacio nulo de S. ¿Cuál es la dimensión del espacio nulo de T?

   (d) Halle una base para la imagen de S. ¿Cuál es la dimensión de la imagen de S?

3. Sean $V = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ c \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; b, c \in \mathbb{R} \right\}$ y $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Muestre que V es un sub-espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Encuentre una base ortonormal para V.

   (c) Encuentre una base ortonormal para $V^\perp$.

   (d) Escriba $\vec{u}$ en la forma $\vec{u} = \vec{u}_V + \vec{u}_{V^\perp}$ donde $\vec{u}_V \in V$ y $\vec{u}_{V^\perp} \in V^\perp$

4. Sea B una matriz de 3×3 con valores propios $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 0$ cuyos vectores propios respectivos son $\vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\vec{v_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

   (a) ¿Es B invertible?

   (b) ¿Es B diagonalizable?

   (c) Calcule el vector $B^{2017}\vec{v_1}$.

5. Considere la cónica dada por la ecuación cuadrática $13x^2 + 24xy + 13y^2 = 1$. Sea $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

   (a) Escriba la ecuación en la forma $A\vec{X} \cdot \vec{X} = 1$ donde A es una matriz simétrica.

   (b) Haga un cambio de variables en la ecuación cuadrática de tal forma que en las nuevas variables no haya término mixto. Escriba la ecuación en las nuevas variables, dibuje la cónica obtenida en el plano xy e identifique los ejes principales del cambio de variables.