Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen final del curso ÁLGEBRA LINEAL (A) – 1105

16 de mayo de 2016

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente. Tiempo máximo 2 horas.

I. Considere el sistema homogéneo $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

a. `[5 puntos]`. Utilice el algorítmo de Gauss-Jordan para hallar una base del espacio de soluciones del sistema.

b. `[5 puntos]`. Halle 5 soluciones distintas del sistema.

II. Sean P_3 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a tres y P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos. Considere la transformación lineal $D: P_3 \to P_2$ definida por $D(f) = -2f'$.

a. `[4 puntos]`. Halle la representación matricial de la transformación T con respecto a las bases $(1, x, x^2, x^3)$ de P_3 y $(1, x, x^2)$ de P_2.

b. `[3 puntos]`. Halle la dimensión del núcleo de D.

c. `[3 puntos]`. Halle la imagen de D.

III. `[10 puntos]`. Sea $W = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Escriba $\mathbf{v} = \mathbf{v}_W + \mathbf{v}_{W^\perp}$ donde $\mathbf{v}_W \in W$ y $\mathbf{v}_{W^\perp} \in W^\perp$.

IV. Sea K la cónica en $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 32$.

a. `[6 puntos]`. Halle la ecuación de K en los nuevos ejes tales que el término mixto no aparezca, y identifique la cónica.

b. `[4 puntos]`. Haga un dibujo de la cónica, identificando los nuevos ejes.

V. *Verdadero o falso, con justificación*:

a. `[5 puntos]`. Si A es una matriz de 2×2 que sólo tiene un valor propio, entonces A no puede ser diagonalizable.

b. `[5 puntos]`. Si $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una funcion tal que $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces T es una transformación lineal.