Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen final del curso ÁLGEBRA LINEAL (A) – 1105

Noviembre 24 de 2015

Este es un examen **individual**, no se permite el uso de libros, apuntes, calculadoras o cualquier otro medio electrónico. Recuerde apagar y guardar su teléfono celular. Toda respuesta debe estar **justificada** matemáticamente.
Tiempo máximo 2 horas.

I. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por el vector $[2,-2,1]$.

a. `[2 puntos]`. Halle una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ que contenga una base de $W^\perp$.

b. `[2 puntos]`. Encuentre la proyección ortogonal del vector $[1,1,2]$ sobre el subespacio $W^\perp$.

c. `[2 puntos]`. Calcule la distancia de $[1,1,2]$ a $W^\perp$.

II. Sea P_2 el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos. Considere la base ordenada $B = \big(1, 1-x, x+x^2\big)$ de P_2 y la transformación lineal $T : P_2 \to P_2$ definida por

$$T(1) = x + x^2,\ T(1-x) = 1 + x + x^2,\ T(x+x^2) = x.$$

a. `[2 puntos]`. Halle la representación matricial de la transformación T con respecto a la base B.

b. `[2 puntos]`. Halle las coordenadas de $2 + x^2$ en la base B.

c. `[2 puntos]`. Calcule $T(2 + x^2)$.

d. `[2 puntos]`. Encuentre el núcleo de T.

III. Sea K la cónica en $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación $10x^2 - 8xy + 4y^2 = 12$.

a. `[2 puntos]`. Escriba la ecuación anterior bajo la forma $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 12$ donde A es una matriz simétrica real 2×2.

b. `[2 puntos]`. Halle una matriz ortogonal C con $\det(C) = 1$ y una matriz diagonal D tal que $A = CDC^t$ (donde C^t denota la transpuesta de la matriz C).

c. `[2 puntos]`. Identifique la cónica K y dibújela en el marco de coordenadas (x, y).

IV. *Verdadero o falso, con justificación*:

a. `[2 puntos]`. Si A es una matriz de $m \times n$, entonces el conjunto de vectores $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n :\ A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

b. `[2 puntos]`. El único valor de a para el cual determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & a & 3 \end{vmatrix} = 0$ es $a = -9$.

c. `[2 puntos]`. Si M es una matriz de $n \times n$ tal que $M^2 = I$, entonces todo valor propio de M es -1 o 1.