UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Exámen Final de Algebra Lineal. Noviembre 30 de 2010

El juramento del uniandino dice: **"Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"**

Justifique en forma clara y matemáticamente cada una de sus respuestas.

1. Considere el sistema lineal de ecuaciones $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 &= 9 \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 &= 14 \end{cases}$

   a) Encuentre todas las soluciones del sistema.

   b) Dé una solución particular del sistema.

2. Para la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 9 \end{bmatrix}$, halle:

   a) Todos los valores propios de la matriz A.

   b) El espacio propio de la matriz A correspondiente al valor propio $\lambda = 1$.

3. Sean $P(2,-1,0)$, $Q(3,1,2)$ y $R(0,0,0)$ tres puntos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

   a) Halle una base ortonormal para el plano Π que pasa por los puntos P, Q y R.

   b) Halle una base para el complemento ortogonal del plano Π.

   c) Encontre la proyección ortogonal del vector $\vec{b} = [1,3,1]$ sobre el plano Π.

4. Sean $B = \{1, 1+x, 1+2x+x^2\}$ una base ordenada para el espacio P_2 y $T\colon P_2 \to P_2$ una transformación lineal tal que $T(1) = x+1$, $T(1+x) = x^2$ y $T(1+2x+x^2) = 1+2x+x^2$.

   a) Muestre que el conjunto B es una base del espacio P_2.

   b) Encuentre las coordenadas de $p(x) = 2 - x^2$ relativas a la base B.

   c) Halle $T(2-x^2)$.

   d) Halle el núcleo (kernel) de T.

5. Conteste falso (F) o verdadero (V) según sea el caso. En caso de ser falso, justifique mediante un contraejemplo. En caso verdadero, justifique únicamente mediante la teoria (teoremas definiciones, resultados,...).

   a) El conjunto $S_{2\times 2}$ de todas las matrices simétricas de tamaño 2×2, es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

   b) Si $A \in M_{2\times 2}$ tiene polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 6$, entonces la matriz A es diagonalizable.

   c) Si las matrices A y B son invertibles y del mismo tamaño, entonces AB es invertible.

Nota: *No se permite el uso de textos, apuntes , tablas, calculadoras ni CELULARES.*

Duración: *2 horas*