Mate 1105 Algebra Lineal
Examen Final — (01/12/2009)

El juramento del uniandino dice:
"Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"
Nota: No se permite el uso de textos, apuntes , tablas, calculadoras ni celulares.

Nombre:______________________________.Firma:________________.

1. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Compruebe que los únicos valores propios de la matriz A son 2 y 4.

   b) Encontrar la matriz diagonal D y una matriz C invertible que diagonalice a la matriz A, es decir, $(D = C^{-1}AC)$.

   c) Encuentre una matriz Q ortogonal (orthogonal) tal que $D = Q^T AQ$.

   d) Calcule $A^8\vec{v}$, donde $\vec{v} = [0, 0, 1]$.

2. Considere la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T([x, y, z]) = [x + y, y - 3z]$.

   a) Encontrar la matriz de representación estandar de la transformación T.

   b) Dadas las bases $B = \{[1, 1, 1], [1, 1, 0], [1, -1, 0]\}$ de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{[1, 2], [2, -1]\}$ de $\mathbb{R}^2$. Encuentre las matrices de cambio de las bases B, B' a las bases canónicas.

   c) Encuentre la matriz de representación de T relativa a las bases B, B'.

3. Sea la recta ℓ en $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación $y = 2x$. Considere la transformación lineal Ψ que proyecta un vector cualesquiera $[x_1, x_2]$ de $\mathbb{R}^2$ sobre la recta ℓ.

   a) Encuentre una expresión algebraica para $\Psi[x_1, x_2]$.

   b) Halle las dimensiones del núcleo (kernel) y de la imagen (range)de la transformación Ψ.

   c) Halle el complemento ortogonal de ℓ y dé una base.

4. Conteste falso (F) o verdadero según sea el caso. En caso de ser falso puede justificar su respuesta mediante un ejemplo. En caso verdadero justifique su respuesta mediante algún argumento matemático (toremas, definiciones,..).

   a) El conjunto $H = \{p(x) \in P_3 : \ p(2) = 0\}$, es un subespacio del espacio de los polinomios de grado a lo más 3.

   b) El conjunto de vectores $\{[1, 0, 1], [1, 1, 2]\}$ forman una base para el espacio vectorial $W = \{(x, y, z) : \quad x + 2y - z = 0\}$.

   c) La transformación $T : M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$, definida por $T(A) = \det(A)$, es una transformación lineal.

   d) Si $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$, es una transformación lineal con rango de T igual a 4, entonces la dimensión del núcleo de T es 3.

Duración: *2 horas*

Suerte!

Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Mayo 19 de 2009

(5 Puntos) **I**. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, cuyo polinomio característico está dado por $\det(A - \lambda I) = (\lambda + 2)^2 (\lambda - 4)$.

a. Encuentre vectores propios correspondientes a los valores propios de A.
b. Encuentre una base ortonormal de vectores propios.
c. Encuentre D diagonal y C ortogonal tal que $A = CDC^t$.

(5 Puntos) **II**. Sea $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

a. Halle $[T]_B$, la matriz que representa T en base B.

b. Encuentre la matriz de cambio de coordenadas (base) de base B a base canónica C.

c. Encuentre la matriz $[T]_C$ que representa la transformación en base canónica (puede dejar las operaciones indicadas).

(5 Puntos) **III**. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = & 5 \\ x + 3y + 5z + 7w = & 11 \\ x \qquad - z - 2w = & -6 \end{cases}$ que, en forma $A\vec{x} = \vec{b}$, se escribe $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -6 \end{bmatrix}$ y, tras una reducción por filas, da lugar a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

a. Escriba el sistema de la forma $x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + z\vec{a}_3 + w\vec{a}_4 = \vec{b}$, donde $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$ son las columnas de la matriz A.
b. Diga si el sistema tiene solución única, ninguna solución o infinitas soluciones.
c. Sean $\vec{a}_1 = [1,1,1]$, $\vec{a}_2 = [2,3,0]$, $\vec{a}_3 = [3,5,-1]$, $\vec{a}_4 = [4,7,-2]$ (las columnas de la matriz A), y $W = Span\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$.
(i) Encuentre un elemento $\vec{w} \in W$ diferente de cero y de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4$.
(ii) El vector $\vec{b} = [5, 11, -6]$ pertenece a W? (Note que $\vec{b}$ es el vector al lado derecho del sistema.)
d. forma el conjunto $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4\}$ una base para W?
e. Sea $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, donde A es la matriz asociada al sistema de ecuaciones anterior. Encuentre una base para el núcleo (espacio nulo) $N(A)$ de A, el rango (o espacio imagen) de A, y sus respectivas dimensiones.

(5 Puntos) **IV**. Responda falso o verdadero, justificando matemáticamente su respuesta.
a. Sean A y B matrices ortogonales. El producto AB es ortogonal.
b. La transformación $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T[x, y] = [x + 1, y]$ es lineal.
c. El conjunto $W = \{(x, y, z) : 2x - 3y + z = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.
d. Si A, B y C son matrices 2×2 tales que $\det A = 1$, $\det B = -3$ y $\det C = 2$, entonces $\det\left(2AB^{-1}C^t\right) = 4$.

Tiempo máximo 2 horas. No se permite el uso de tablas o calculadoras. Todo teléfono celular debe estar apagado.

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

EXAMEN FINAL. MATE – 1105

JULIO 21 DE 2009

FAVOR FIRMAR EL TEMA Y DEVOLVERLO CON EL EXAMEN

1. Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + y - z = 0 \\ 3x + 5y + k^2 z = k+1 \end{cases}$. Determine el valor o valores de la constante k de tal forma que el sistema:

a) Tenga infinitas soluciones
b) No tenga solución (sea inconsistente)
c) Tenga solución única

2. Sea $T: P_2 \to P_3$ definida por $T(p(x)) = x^2 p'(x) + p(x)$. Encuentre:
a) La matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas.
b) Núcleo, imagen, nulidad y rango de T
c) Una base para el núcleo y una base para la imagen

3. Identifique la cónica representada por la ecuación $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$ asociando una matriz simétrica a la forma cuadrática. Halle la matriz que la diagonaliza, identifique el ángulo de rotación y construya la gráfica de la cónica

4. Sean $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ dos base de $\Re^2$, encuentre la matriz de cambio de base de B a B\`. Si $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ es el vector de coordenadas de un vector en la base B, ¿cual es el vector de coordenadas del mismo vector en la base B'?

5. Para cada uno de los siguientes enunciados, determine si es falso o verdadero. Según sea el caso y justifique claramente su respuesta, demostrando el que sea verdadero y dando un contraejemplo para el falso
a) Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
b) Si el conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ genera al espacio vectorial V, entonces el conjunto es linealmente independiente
c) A, B y C son matrices 3x3 tales que det (A) = 2, det (B) = ½ y det (C) = 3. El determinante de la matriz $2A(BC^t)^{-1}$ es $\frac{8}{3}$.
d) El conjunto $H = \{(x, y, z) / 2x - y + z = 1\}$, es un subespacio de $\Re^3$
e) El área del paralelogramo generado por los vectores (1,2,3), (4,1,0) es 217 unidades cuadradas.

TIEMPO: DOS HORAS.
NOTA: NO SE PERMITE EL USO DE TEXTOS Y APUNTES.
TODOS LOS PUNTOS TIENEN IGUAL VALOR

* Recuerde el juramento del Uniandino: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o de cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad".