Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Diciembre 2 de 2008

(5 Puntos) **I**. Responda falso o verdadero, justificando matematicamente su respuesta.

(i) Si A es una matriz ortogonal, entonces $\det A = \pm 1$.

(ii) Si $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$ es un sistema de ecuaciones lineales con mas ecuaciones que incógnitas, entonces el sistema no tiene solución.

(iii) Si $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$ son vectores en $\mathbb{R}^n$ y $\| \vec{\mathbf{x}} \| = \| \vec{\mathbf{y}} \|$, entonces $\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}}$ y $\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{y}}$ son perpendiculares.

(iv) Si A y B son matrices 2×2 y $\det A = 2$, $\det B = -1$, entonces $\det\left(3A^T B^2\right) = 12$.

(5 Puntos) **II**. Considere el subespacio $W = \mathsf{Sp}\{(1,1,1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(i) Encuentre el plano $W^\perp$.

(ii) Halle una base ortonormal $B_{W^\perp}$ para $W^\perp$.

(iii) Halle la matriz de proyección sobre $W^\perp$.

(iv) Encuentre la distancia del punto $(1,2,3)$ al plano $W^\perp$.

(5 Puntos) **III**. Considere el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{rl} x+2y+z = & 4 \\ x-y+4z = & 4 \\ y-z = & 0 \\ x+3y+z = & 4 \end{array}\right.$ que, en forma $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$, se escribe

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ y, tras una reducción por filas, da lugar a la matriz aumentada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

(i) Escriba el sistema en la forma $\vec{a}_1 x + \vec{a}_2 y + \vec{a}_3 z = \vec{b}$, donde $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ son las columnas de la matriz A.

(ii) Diga si el sistema tiene solución única, ninguna solución o infinitas soluciones.

(iii) Sean $\vec{w}_1 = (1,1,0,1)$, $\vec{w}_2 = (2,-1,1,3)$, $\vec{w}_3 = (1,4,-1,1)$ y $W = \mathsf{Sp}\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$. Encuentre un elemento $\vec{w} \in W$ diferente de cero y de $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$. El vector $(4,4,0,4)$ pertenece a W?

(iv) Forma el conjunto de vectores $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ una base para W?

(v) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal $T(\vec{\mathbf{x}}) = A\vec{\mathbf{x}}$, donde A es la matriz asociada al sistema de ecuaciones anterior. Encuentre el núcleo (o espacio nulo) $N(A)$ de A, el rango (o espacio imagen) $R(A)$ de A, y sus respectivas dimensiones.

(5 Puntos) **IV**. Considere la cónica en el plano cuya ecuación es $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 4$.

(i) Encuentre la matriz A *simétrica* de la forma cuadrática correspondiente.

(ii) Diagonalice la forma cuadrática, encuentre los ejes principales de la cónica y escriba la ecuación de la cónica en los nuevos ejes.

(iii) Haga un boceto de la cónica.

Departamento de Matemáticas **Universidad de los Andes**

Examen final curso Mate 1105

Mayo 20 de 2008

FAVOR FIRMAR EL TEMA Y DEVOLVERLO CON EL EXAMEN

1. Considere la transformación lineal T, definida en P_3 , espacio de los polinomios de grado menor o igual a 3, así:

$$T(1) = 1\ ;\ T(x) = x - 1;\ T(x^2) = x^2 - 2x\ ;\ T(x^3) = x^3 - 3x^2.$$

i. Halle A_T , matriz asociada a T respecto de la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$.
ii. Calcule el determinante de A_T.
iii. ¿T es invertible? Explique.
iv. Halle los números que corresponden al rango y a la nulidad de A_T.

2. Sean la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y el vector $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

i. Halle un vector $\vec{v}$ que <u>no</u> pertenezca a N_A (el espacio nulo de A).
ii. Halle todas las soluciones $\vec{x}$ de la ecuación $A\vec{x} = \vec{b}$.
iii. Halle una base para el espacio imagen de A y otra para el espacio nulo de A.

3. Considere el plano de $\mathbb{R}^3$ dado por $W = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0 \right\}$.

i. Demuestre que W es un subespacio vectorial.
ii. Encuentre una base ortonormal para W.
iii. Encuentre el complemento ortogonal $W^{\perp}$.
iv. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal que a cada vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ lo proyecta sobre el subespacio $W^{\perp}$. Encuentre la matriz P_0 de la transformación respecto a la base canónica $B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
v. Encuentre la matriz P_1 de la transformación respecto a la base
$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
vi. Son P_0 y P_1 matrices semejantes?

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y considere la transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ dada por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

i. Demuestre que 3 es valor propio de la transformación.
ii. Encuentre una base B para $\mathbb{R}^3$ en la cual la matriz de la transformación sea diagonal.

TIEMPO MAXIMO DOS HORAS **NO SE PERMITE EL USO DE:** Apuntes, textos, celulares

El juramento uniandino dice: “Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad”