Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Mayo 26 de 2007

I. Responda falso o verdadero, justificando matematicamente su respuesta.

(i) El conjunto $Q = \{p(x) \in P_2[x] \mid (p(x))^2 = p(x)\}$ es un subespacio vectorial del espacio $P_2[x]$ de polinomios de grado menor o igual a 2.

(ii) Si $A\vec{x} = \vec{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales con infinitas soluciones, entonces los vectores columna de la matriz cuadrada A son linealmente independientes.

(iii) Si A y B son matrices cuadradas similares entonces $\det A = \det B$.

(iv) La matriz de la transformación lineal $T : P_1[x] \to P_1[x]$ definida por

$$T\,(p(x)) = p(x) - xp'(x),$$

respecto a la base canónica, es una matriz de proyección.

(v) Si A y B son matrices 3×3 y $\det A = 4$, $\det B = 2$, entonces $\det\left(\frac{1}{2}(A^{-1}B)^T\right) = \frac{1}{8}$.

II. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre el núcleo (espacio nulo) $N(A)$ de A, una base para $N(A)$ y su dimensión.

(ii) Encuentre el rango (espacio imagen) $R(A)$ de A, una base para $R(A)$ y su dimensión.

III. Considere el plano $W = \mathsf{Sp}\,\{\vec{v}_1 = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), \vec{v}_2 = (0, 0, 1)\}$ en $\mathbb{R}^3$.

(i) Encuentre un vector $\vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$, unitario y perpendicular a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$.

(ii) Encuentre $W^\perp$, el complemento ortogonal a W.

(iii) Encuentre la proyección del vector $\vec{b} = (1, 0, 0)$ sobre W.

(iv) Encuentre la descomposición ortogonal $\vec{b} = \vec{b}_W + \vec{b}_{W^\perp}$, con $\vec{b}_W \in W$, $\vec{b}_{W^\perp} \in W^\perp$.

(v) Encuentre la matriz de cambio de base de la base canónica B_o de $\mathbb{R}^3$ a la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

(vi) Encuentre las coordenadas del vector $\vec{b}$ en la base ordenada B.

IV. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Demuestre que los valores propios de A son 1 y 3.

(ii) Encuentre los vectores propios de A correspondientes a cada valor propio.

(iii) Calcule las multiplicidades algebraica y geométrica de cada valor propio y diga si la matriz A es diagonalizable, en caso de serlo encuentre las matrices D diagonal y C invertible tales que $A = CDC^{-1}$.

Tiempo máximo: 2 horas.

Recuerde que no está permitido el uso de textos, tablas, apuntes ni calculadoras, y que todo teléfono celular debe estar apagado.

Universidad de Los Andes — Departamento de Matemáticas

Examen Final del curso ÁLGEBRA LINEAL – 1105

Diciembre 4 de 2007

I. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ y las siguientes bases: $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_o = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, la base canónica. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la *reflexión* sobre la recta $y = x$ en el plano, y sea $\vec{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ el vector determinado por $[\vec{\mathbf{v}}]_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(i) Encuentre M_{B_o}, la matriz que representa la transformación T en la base canónica.

(ii) Encuentre $[\vec{\mathbf{v}}]_{B_2}$.

(iii) Encuentre $[T(\vec{\mathbf{v}})]_{B_o}$.

(iv) Encuentre $[T(\vec{\mathbf{v}}_{B_1})]_{B_2}$.

II. Sea W un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y el plano $W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \; x + 2y + 3z = 0\}$, su complemento ortogonal.

(i) Halle una base ortogonal $B_{W^\perp}$ para $W^\perp$.

(ii) Halle una base B_W para W.

(iii) Halle una base ortogonal B para $\mathbb{R}^3$ que contenga un vector de $W^\perp$.

(iv) Encuentre la proyección del vector $\vec{\mathbf{x}} = (1, 1, 1)$ sobre el subespacio $W^\perp$.

(v) Encuentre dos vectores $\vec{\mathbf{x}}_1, \vec{\mathbf{x}}_2 \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_1 + \vec{\mathbf{x}}_2$, con $\vec{\mathbf{x}}_1 \in W$ y $\vec{\mathbf{x}}_2 \in W^\perp$.

III. Considere el sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{rl} x + y + z = & 1 \\ x - y + 2z = & 6 \\ x + \quad\;\; z = & 3 \end{array} \right.$.

(i) Escriba el sistema en la forma $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.

(ii) Calcule el determinante de la matriz A y diga si el sistema tiene solución única, ninguna solución o infinitas soluciones.

(iii) En caso de tener solución única, encuentre tal solución (por cualquier método).

(iv) Encuentre el núcleo (espacio nulo) $N(A)$ de A, el rango (espacio imagen) $R(A)$ de A, y sus respectivas dimensiones.

IV. Considere la cónica en el plano cuya ecuación es

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 = 10.$$

(i) Encuentre los ejes principales de la cónica.

(ii) Diagonalice la forma cuadrática y escriba la ecuación de la cónica en los nuevos ejes.

(iii) Haga un boceto de la cónica.

Tiempo máximo: 2 horas.
Recuerde que no está permitido el uso de textos, tablas, apuntes ni calculadoras, y que todo teléfono celular debe estar apagado.

Álgebra lineal
Examen Final — (19/07/2007)[1]

1. Considere los subespacios

$$H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$$

$$H_2 = gen \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$H_3 = \{[\lambda + \mu, \lambda + \nu, \nu + \delta, \lambda + \delta] \mid \lambda, \mu, \nu, \delta \in \mathbb{R}\}$$

   a) Pertenece el vector $[1, 0, 1, -2]$ a dichos subespacios?. Justificar.

   b) Escribir el vector de coordenadas del vector $[1, 0, 1, -2]$ relativo a una base de H_2.

   c) Encontrar una base para el subespacio $H_2^{\perp}$.

   d) En $\mathbb{R}^4$ escribir el vector $[1, 0, 1, -2]$ como la suma de un vector en H_2 y uno en $H_2^{\perp}$.

2. Encontrar la matriz de proyección P que proyecta a todo vector de $\mathbb{R}^3$ sobre la intersección de los planos $x + y + z = 0$ y $x - z = 0$.

3. Considere la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

   a) Halle los valores y vectores propios.

   b) Calcule la multiplicidad algebraica y geométrica de cada valor propio y diga si la matriz A es diagonalizable, en caso afirmativo encuentre D diagonal y C invertibles tales que $A = CDC^{-1}$.

4. Conteste falso o verdadero según sea el caso. En caso de ser falso justifique mediante un ejemplo. En caso verdadero, justifique únicamente usando argumentos matemáticos (No use ejemplos).

   a) ·———·Si A es una matriz ortogonal, entonces A^{-1} es ortogonal.

   b) ·———·Si $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$, entonces $C_{BB'} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   c) ·———·$H = \{p(x) \in P_2 \mid p'(1) = 0\}$ es un subespacio de P_2.

   d) ·———·La transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ y \end{bmatrix}$ es inyectiva.

   e) ·———·Si $|A_{3\times 3}| = -1$ y $|B_{3\times 3}| = 2$, entonces $\left| 2 \left(A^T B \right)^{-1} \right| = 4$.

No se permite el uso de libros, apuntes ni calculadoras.
No olvide apagar su celular.

[1]El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"