UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Exámen Final de Algebra Lineal. Mayo de 2006

FAVOR FIRMAR EL TEMA Y DEVOLVERLO CON EL EXÁMEN

Justifique en forma clara y matemáticamente cada una de sus respuestas.

Para los ejercicios 1, 2 y 3, considere el sistema de ecuaciones: $\left\{\begin{array}{rl} x - y & = -2 \\ -x + 2y - z & = 0 \\ -y + z & = 2 \end{array}\right.$

1. a) Escriba el sistema en la forma $A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$.
   b) Muestre que el vector $\vec{\mathbf{v}} =< 1, -2, 1 >$ es un vector propio de la matriz A. ¿Cuál es el valor propio correspondiente?
   c) Calcule el valor del determinante de la matriz A.
   d) Determine todas las soluciones del sistema.
   e) ¿Qué representa geometricamente el conjunto de soluciones del sistema?
2. a) Sea el conjunto $H = \left\{\vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3 : A\vec{\mathbf{x}} = \vec{0}\right\}$. Demuestre que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.
   b) Sea $K = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y - z = 0\right\}$, es decir, K es el conjunto solución de la segunda ecuación (el cual es un subespacio de $\mathbb{R}^3$). Muestre que los vectores $\vec{\mathbf{v_1}} =< 2, 1, 0 >$ y $\vec{\mathbf{v_2}} =< -1, 0, 1 >$ forman una base para K.
   c) Muestre que el vector $< 5, 2, -1 >\in K$. Escriba las coordenadas de éste vector en la base dada en el inciso anterior.
   d) ¿Qué relación existe entre H y K? Explique.
3. Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(\vec{\mathbf{x}}) = A\vec{\mathbf{x}}$.
   a) Está el vector $< 3, -8, 5 >$ en la imagen de T?
   b) Halle una base para la imagen de T.
   c) Indique el rango ρ y la nulidad v de T.
4. Dados los vectores $\vec{\mathbf{u}} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ y $\vec{\mathbf{v}} = \vec{i} + a\vec{j}$ en $\mathbb{R}^2$, determinar los valores del parámetro a para los cuales:
   a) $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son ortogonales.
   b) $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son paralelos.
   c) $Proy_{\vec{\mathbf{u}}}\vec{\mathbf{v}} = \frac{1}{5}\vec{\mathbf{u}}$.
5. En $\mathbb{R}^3$, considere las rectas: $L_1 : \left\{\begin{array}{l} x = 1 + r \\ y = \quad 2r \quad , \quad r \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{array}\right.$ $\qquad L_2 : \left\{\begin{array}{l} x = \quad s \\ y = 1 + 2s \quad , \quad s \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{array}\right.$
   a) Encuentre un punto P_1 sobre la recta L_1y un punto P_2 sobre la recta L_2.
   b) Halle la proyección del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ sobre la recta L_1.
   c) Calcule la distancia entre las rectas L_1 y L_2.

TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS.
NOTA: No se permite el uso de textos, tablas, apuntes ni calculadora.

No olvide apagar su celular![1]

[1]* Recuerde el juramento del Uniandino:"Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma universidad".

UNIVERSIDAD DE LOS ANDES DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

Exámen Final de Algebra Lineal
Julio 25 de 2006

FAVOR FIRMAR EL TEMA Y DEVOLVERLO CON EL EXÁMEN

Justifique en forma clara y matemáticamente cada una de sus respuestas.

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). En caso de ser verdadera, justifique usando la teoría. En caso de ser falsa, justifique con la teoría o mediante un ejemplo.

   a) La distancia entre los planos $\pi_1 : x - y + z = 0$ y $\pi_2 : x - y + z = 1$, es igual a 1.

   b) Si las coordenadas de cierto vector de $\mathbb{R}^2$ relativas a la base $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, entonces sus coordenadas relativas a la base $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ son $\begin{pmatrix} 3x - 5y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$.

   c) Sea $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, una transformación lineal de rango $m < n$. Si A_T es la matriz de representación de T, entonces el sistema lineal homogeneo $A\vec{X} = 0$ admite infinitas soluciones.

   d) Si Q es una matriz simétrica y ortogonal y λ es un valor propio de Q, entonces $\lambda = \pm 1$.

   e) Si $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^4$, es un isomorfismo, entonces el rango de T es 4.

2. Considere el conjunto $H = \{(x, y, z) : (x, y, z) = (t, -3t, t) : T \in \mathbb{R}\}$.

   a) Muestre que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   b) Encuentre el complemento ortogonal $H^\perp$ de H.

   c) Descomponga el vector $\vec{v} = (1, 1, 1)$ como la suma de un vector $\vec{h} \in H$ y otro $\vec{p} \in H^\perp$.

3. Sea A una matriz 3×3 con polinomio caracteristico $P(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 7\lambda - 3$.

   a) ¿Es A invertible?. Justifique.

   b) ¿Es A diagonalizable?. Justifique.

   c) Suponga que A es diagonalizable mediante la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Halle la matriz A.

4. Sea $T : M_{n\times n} \longrightarrow M_{n\times n}$, la transformación definida por $T(A) = A - A^t$.

   a) Pruebe que T es lineal.

   b) Identifique claramente el núcleo y la imagen de T.

TIEMPO MÁXIMO: 2 HORAS.

NOTA: No se permite el uso de textos, tablas, apuntes ni calculadora.

No olvide apagar su celular![1]

[1]* Recuerde el juramento del Uniandino:"Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma universidad".