Mate 1105 Álgebra Lineal
Examen Final — (29/11/2005)

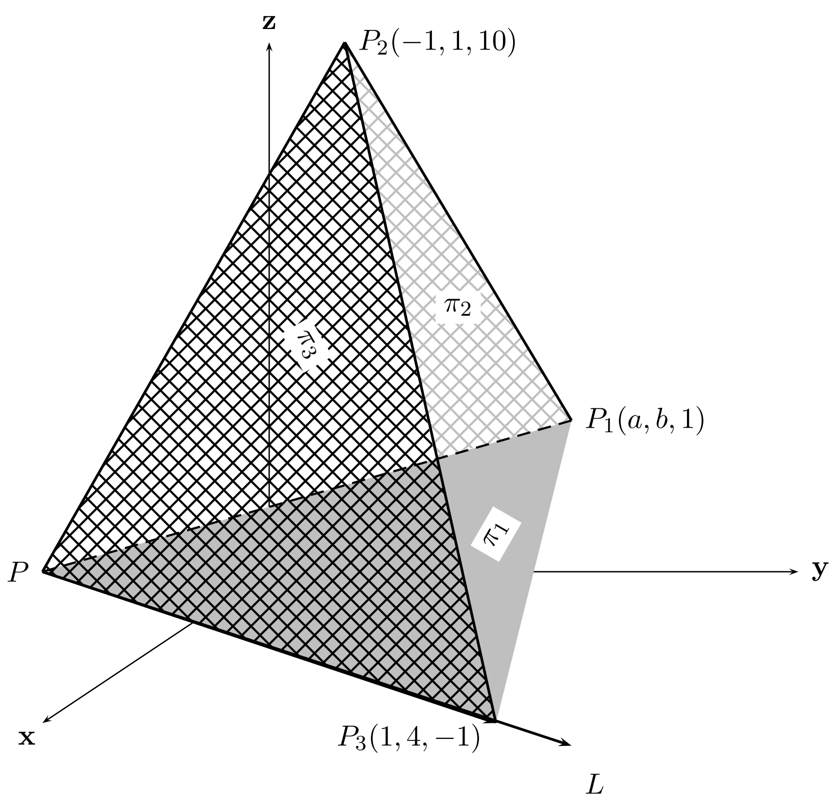
Justifique matemáticamente todas sus respuestas

1. Considere los planos $\pi_1 : x+2y+z=8$, $\pi_2 : 2x+3y+z=11$ y la recta $L : x=1, \frac{y-4}{-2}=\frac{z+1}{4}$. Encuentre:

   a) La intersección entre los planos π_1 y π_2.

   b) Las cordenadas del punto $P_1(a,b,1)$ que se encuentra en la intersección de π_1 y π_2 y el plano horizontal $z=1$.

   c) La ecuación del plano π_3, que contiene a la recta L y al punto $P_2(-1,1,10)$. (**Puede ayudarse con la gráfica**)



2. Considere la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y T la transformación lineal $T : M_{22} \longrightarrow M_{22}$, definida por $T(X)=XA-AX$.

   a) Halle una base para el espacio nulo de T.

   b) Diga si la matriz identidad $\mathbb{I}_2$ se encuentra o no, en la imagen de la transformación T.

3. Considere la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -1 & 0 \\ a & 1 & a \end{pmatrix}$.

   a) ¿Para qué valores del parámetro a, la matriz B es invertible?.

   b) ¿Para qué valores del parámetro a, la matriz B es diagonalizable?.

   c) Si el rango de la matriz B es $\rho(B) = 2$, y H es el espacio imagen de B, entonces ¿$H^{\perp}$ es una recta que pasa por el origen?.

4. Sea A una matriz $n \times n$ y B una matriz equivalente por renglones a la matriz A. Responda falso (F) o veradero (V) según sea el caso. En caso verdadero justifique su respuesta usando la teoría, en caso de ser falso puede justificar haciendo uso de la teoria o mediante un contraejemplo.

   a) Los sistemas $A\vec{x} = \vec{0}$ y $B\vec{x} = \vec{0}$, tienen las mismas soluciones.

   b) $det(A) = det(B)$.

   c) $\upsilon(A) = \upsilon(B)$.

   d) A es invertible si y solo si B es invertible.

   e) Los valores propios de A y de B son los mismos.

No se permite el uso de textos, tablas, calculadoras ni apuntes.[1]
No olvide apagar su celular.

Tiempo máximo 2 horas.

[1]El juramento del uniandino dice: "Juro solemnemente abstenerme de copiar o de incurrir en actos que pueden conducir a la trampa o al fraude en las pruebas académicas, o en cualquier otro acto que perjudique la integridad de mis compañeros o de la misma Universidad"

Examen Final Tema B - Álgebra Lineal
Mayo 11, 2005

Selección múltiple (35 puntos, 75 minutos)

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}A\right)^{-1}\right)^T$ es igual a

   a) $\frac{1}{\sqrt{2}}A$ *b)* A *c)* A^T *d)* $\sqrt{2}A$ *e)* N.A.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$, entonces $AB = BA$ si y solamente si

   a) $\begin{matrix} y = 0 \\ z = 0 \end{matrix}$ *b)* $\begin{matrix} z = 0, \\ w = x \end{matrix}$ *c)* $\begin{matrix} y = 0 \\ x = w \end{matrix}$ *d)* $\begin{matrix} x = w \\ y = z \end{matrix}$ *e)* N.A.

3. Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 3y + 2z &= 6 \\ 2x + 3y + (\mathbf{a}^2 - 15)z &= \mathbf{a} + 2 \end{aligned}$$

   en el cual $\mathbf{a}$ es un parámetro. Este sistema tiene solución única si y solamente si

   a) $\mathbf{a}^2 \neq 16$ *b)* $\mathbf{a}^2 = 16$ *c)* Cualquier valor de $\mathbf{a}$ *d)* $\mathbf{a} + 2 \neq 0$ *e)* N.A.

4. Sea $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ un sistema lineal con infinitas soluciones y considere las siguientes afirmaciones

   i) $\det A = 0$ *ii)* $\operatorname{ran} A = n$ *iii)* $\operatorname{nul} A = 0$

   De estas afirmaciones son falsas las siguientes:

   a) Solamente *ii)* *b)* Solamente *i)* *c)* Todas

   d) Solamente *iii)* *e)* N.A.

5. Si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es la transformación lineal con matriz canónica $A_T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $\mathcal{L}$ es la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen en dirección del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces T transforma a $\mathcal{L}$ en la recta que pasa por el origen en dirección del vector

   a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *b)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ *c)* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *d)* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *e)* N.A.

6. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Geométricamente, esta transformación lineal corresponde a

   a) La rotación de 180° alrededor del origen   *b)* La reflexión respecto al eje x

   c) La proyección sobre la recta $y = x$ *d)* La reflexión respecto a la recta $y = -x$

   e) N.A.

7. Un piloto, quien vuela bajo un viento que sopla a 50 millas/h en dirección sur, observa que su rumbo final es al este cuando dirige su avión a 30° al norte del este. ¿Cuál será el vector velocidad del avión en ausencia de viento?

   a) $\left(1, \sqrt{3}/3\right)$ *b)* $\left(50\sqrt{3}, 50\right)$ *c)* $\left(100, 100\sqrt{3}\right)$ *d)* $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ *e)* N.A.

8. Si A y B son matrices 5×5 tales que $|A| = 5$ y $|B| = 3$, entonces $\left|\frac{1}{5}BA^TB^{-1}\right|$ es igual a

   a) $\frac{9}{625}$ *b)* $\frac{1}{625}$ *c)* $\frac{9}{125}$ *d)* $\frac{1}{125}$ *e)* N.A.

9. La gráfica de la ecuación cuadrática $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 32 = 0$ es

   a) Una parábola   *b)* Un círculo   *c)* Una elipse   *d)* Una hipérbola   *e)* N.A.

10. La distancia de la recta $(x, y) = (0, 2) + r(3, -1)$, $r \in \mathbb{R}$, al origen es

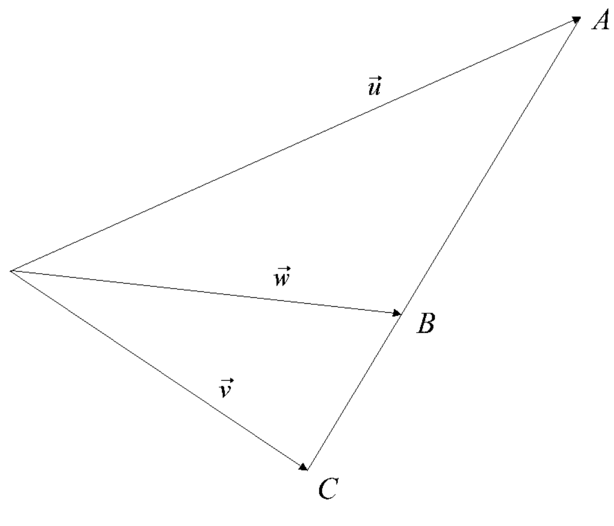
    a) 2   *b)* $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ *c)* 6   *d)* $\frac{1}{5}\sqrt{10}$ *e)* N.A.

11. Si en la figura $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, entonces

    a) $\frac{1}{3}\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{2}{3}\vec{\boldsymbol{v}}$ *b)* $\frac{1}{3}\vec{\boldsymbol{u}} - \frac{2}{3}\vec{\boldsymbol{v}}$

    c) $\frac{2}{3}\vec{\boldsymbol{u}} + \frac{1}{3}\vec{\boldsymbol{v}}$ *d)* $\frac{2}{3}\vec{\boldsymbol{u}} - \frac{1}{3}\vec{\boldsymbol{v}}$

    e) N.A.



12. El volumen del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{\boldsymbol{u}} = (2, 3, 4)$, $\vec{\boldsymbol{v}} = (0, 4, -1)$ y $\vec{\boldsymbol{w}} = (5, 1, 3)$ es igual a

    a) 69   *b)* 121   *c)* $\frac{23}{2}$ *d)* $\frac{121}{6}$ *e)* N.A.

13. En $\mathbb{R}^5$, el punto sobre el segmento de recta que une a los puntos $\boldsymbol{a} = (1, -1, 1, -1, 1)$ y $\boldsymbol{b} = (-1, 1, -1, 1, -1)$ y que está a $\frac{1}{10}$ de camino de $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{a}$ es:

    a) $\frac{4}{5}(1, -1, 1, -1, 1)$ *b)* $\frac{1}{5}(1, -1, 1, -1, 1)$

    c) $-\frac{4}{5}(1, -1, 1, -1, 1)$ *d)* $-\frac{1}{5}(1, -1, 1, -1, 1)$ *e)* N.A.

14. En $\mathbb{R}^3$, los planos $x + y = 1$ y $y + z = 1$

    a) Forman un ángulo de 45° *b)* Son perpendiculares

    c) Forman un ángulo de 60° *d)* Son paralelos *e)* N.A.

Examen Final Tema B - Álgebra Lineal
Mayo 11, 2005

Problemas de desarrollo (15 puntos, 45 minutos)

1. (5 puntos) Halle la distancia entre las rectas alabeadas

$$x_1 = 1 + 2r, \qquad x_2 = -2 + 3r, \qquad x_3 = -4r, \qquad r \in \mathbb{R}, \qquad \text{y}$$
$$x_1 = 3s, \qquad x_2 = 1 + s, \qquad x_3 = -5s, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

2. (5 puntos) Halle una base ortonormal para el subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ que es conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 - \phantom{\tfrac{1}{2}}x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - \tfrac{1}{2}x_4 &= 0. \end{aligned}$$

3. (5 puntos) En $\mathbb{R}^4$, halle la distancia al origen de la variedad lineal 2-dimensional V (plano) dada por

$$V : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad t, u \in \mathbb{R}.$$

(*Sugerencia*: Utilice el resultado del punto 2.)