Problema Periódico Asociado al Sistema De Zakharov-Rubenchik/Benney-Roskes

Yeison Alejandro Gómez Hernández

Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales

Contenido

Sistema De Zakharov-Rubenchik/Benney-Roskes

Consideraremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \partial_t\psi - \sigma_3\partial_x\psi - i\delta\partial_x^2\psi + i\left\{\sigma_2|\psi|^2 + W\left(\rho + D\partial_x\phi\right)\right\}\psi = 0 \\ \partial_t\rho + \partial_x^2\phi + D\partial_x\left(|\psi|^2\right) = 0 \\ \partial_t\phi + \frac{1}{M^2}\rho + |\psi|^2 = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

el cual fue obtenido por V. E. Zakharov-A. M. Rubenchik y D. J. Benney-G. J. Roskes para modelar la interacción de ondas de baja amplitud y alta frecuencia (ψ) con ondas de tipo acústico de baja frecuencia (ρ, ϕ).

Aquí $\sigma_2, \sigma_3 = \pm 1$, $W > 0$ mide la intensidad del acoplamiento con las ondas acústicas, $M > 0$ es un número de Mach, $D \in \mathbb{R}$ está asociado al efecto Doppler debido a la velocidad del medio, y $\delta \in \mathbb{R}$ es un coeficiente de dispersión adimensional.

Problema con condiciones de borde periódicas

El problema de Cauchy asociado a la ecuación de onda unidimensional es:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \text{ para } -\infty < x < \infty,$$
$$u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x).$$

donde la solución $u = u(x,t)$ es una función que indica la amplitud de la onda en x al instante t. Sin embargo, en el modelamiento del fenómeno físico, se tiene $0 \leq x \leq l$, donde l es la longitud de una cuerda vibrante, sujeta en los extremos. Y esto suele llevar al planteamiento de un problema de Cauchy como el siguiente:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{para } -l \leq x \leq l$$
$$u(-l,t) = u(l,t) \quad u_t(-l,t) = u_t(l,t).$$

Esto es un ejemplo de un "problema con condiciones de borde periódicas".

Buen planteamiento

Uno de los análisis más comunes en el área (EDPs) es el estudio de las siguientes condiciones:

1. Existencia de solución.
2. Unicidad de la solución.
3. Estabilidad de la solución, es decir, la solución depende continuamente de las condiciones iniciales del sistema, lo que siginifica que pequeñas perturbaciones de los datos iniciales generan pequeñas perturbaciones en la solución.

Cuando un sistema cumple lo anterior se dice que el sistema es “bien planteado” (Strauss (2008)).

Semigrupo

Definición 1.1. Sea X un espacio de Banach. Una familia $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineales acotados de X en X es un *semigrupo de operadores lineales acotados en* X si se cumple:

(i) $T(0) = I$ (donde I es el operador identidad en X).

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$ para todo $t, s \geq 0$ (la propiedad de semigrupo).

El operador lineal A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X : \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}, \tag{2}$$

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)x - x}{t} = \frac{d^+}{dt} T(t)x \Big|_{t=0}, \quad \text{para } x \in D(A), \tag{3}$$

es el *generador infinitesimal* del semigrupo $T(t)$ y $D(A)$ es el dominio de A.

Definición 1.1. Un semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, de operadores lineales acotados en X es un *semigrupo fuertemente continuo* de operadores lineales acotados si

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = x \qquad \text{para todo } x \in X. \tag{4}$$

Un semigrupo fuertemente continuo de operadores lineales acotados en X se denominará un *semigrupo de clase* C_0, o simplemente un *semigrupo* C_0.

Corolario 1.1. Si $T(t)$ es un *semigrupo* C_0, entonces para todo $x \in X$, la aplicación $t \mapsto T(t)x$ es una función continua de $\mathbb{R}^+$ en X.

Propiedades del semigrupo C_0

Teorema 1.1. Sea $T(t)$ un semigrupo C_0 y sea A su generador infinitesimal. Entonces:

a) Para $x \in X$,
$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x\, ds = T(t)x.$$

b) Para $x \in X$, se tiene $\int_0^t T(s)x\, ds \in D(A)$ y
$$A\left(\int_0^t T(s)x\, ds\right) = T(t)x - x.$$

c) Para $x \in D(A)$, $T(t)x \in D(A)$ y
$$\frac{d}{dt} T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

d) Para $x \in D(A)$,
$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Ax\, d\tau = \int_s^t AT(\tau)x\, d\tau.$$

Corolario 1.2. Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 en X, entonces $D(A)$, el dominio de A, es denso en X y A es un operador lineal cerrado.

Corolario 1.3. Si A es el generador infinitesimal de un semigrupo C_0 en X $(T(t))$, entonces el PVI

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = x \end{cases}$$

tiene solución única $u(t) = T(t)x$, continua para $t \geq 0$, continuamente diferenciable, y $u(t) \in D(A)$ para $t > 0$.

Transformada de fourier en $\mathbb{T}$

Entenderemos el toro $\mathbb{T}$ como $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Si F es una función sobre el toro, entonces

$$f(x) = F(e^{ix})$$

define una función 2π periódica.

Definición 1.2. La transformada de Fourier de una función $f \in L^1(\mathbb{T})$ es la sucesión compleja $\widehat{f} = \left(\widehat{f}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ definida para cada entero k como

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

La serie

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

se denomina *la serie de Fourier.*

Los espacios $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$

$\mathcal{P} = C^\infty(\mathbb{T})$ es el espacio de todas la funciones periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de período 2π infinitamente diferenciables. $(\mathcal{P}, d)$ es un espacio métrico completo con la métrica

$$d(\phi, \psi) = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} \frac{\left\| \phi^{(j)} - \psi^{(j)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}{1 + \left\| \phi^{(j)} - \psi^{(j)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})}}$$

Definimos $\mathcal{S}(\mathbb{Z})$ como el espacio de las sucesiones que decrecen rápidamente, es decir, $\alpha = (\alpha_k) \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ si y solo si

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| k^j \alpha_k \right| < \infty, \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$\mathcal{P}'$ es el dual topológico de $\mathcal{P}$ y es llamado el *espacio de las distribuciones periódicas*.

Definición 1.3. La transformada de Fourier en $\mathcal{P}'$ es la sucesión compleja

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\left\langle f, e^{-ik(\cdot)}\right\rangle, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z}.$$

Definimos la derivada de una distribución periódica f como

$$\left\langle f^{(j)}, \phi\right\rangle := (-1)^j \left\langle f, \phi^{(j)}\right\rangle,$$

para todo entero $j \geq 0$ y cada función $\phi \in \mathcal{P}$.
Una sucesión compleja $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ es de crecimiento lento si existe una constante $C > 0$ y un entero positivo N, tal que

$$|\alpha_k| \leq C|k|^N \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

El conjunto de todas estas sucesiones se denota por $\mathcal{S}'(\mathbb{Z})$.

Teorema 1.2.

a) Sea $\phi \in \mathcal{P}$. Entonces, $\widehat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ y $\widehat{\phi^{(j)}}(k) = (ik)^j \widehat{\phi}(k)$, para todo entero k. Además, vale la fórmula de inversión

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{ikx}.$$

b) La transformada de Fourier $\widehat{\cdot}: \mathcal{P} \mapsto \mathcal{S}(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo.

c) La transformada de Fourier $\widehat{\cdot}: \mathcal{P}' \to \mathcal{S}'(\mathbb{Z})$ es un isomorfismo y un homeomorfismo. Además, si $f \in \mathcal{P}'$

$$\widehat{\left(f^{(j)}\right)}(k) = (ik)^j \widehat{f}(k),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y cada entero $j \geq 0$.

Sea $s \in \mathbb{R}$. El espacio de Sobolev $H^s(\mathbb{T})$ consiste en todas las distribuciones $f \in \mathcal{P}'$ tales que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{f}(k)\right|^2 < \infty.$$

El producto interno y la norma de $f, g \in H^s(\mathbb{T})$ se definen como

$$(f,g)_s = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)},$$

$$\|f\|_s = \left(2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1+k^2)^s \left|\widehat{f}(k)\right|^2\right)^{1/2}.$$

Con este producto interno, $H^s(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert.

Teorema 1.3.

a) Sea $s \geq r$. Entonces $H^s(\mathbb{T}) \hookrightarrow H^r(\mathbb{T})$. $H^s(\mathbb{T})$ está densamente contenido en $H^r(\mathbb{T})$.

b) Si $s > \frac{1}{2}$, $H^s(\mathbb{T})$ es un álgebra de Banach. En particular, existe una constante C_s que depende solo de s tal que

$$\|fg\|_s \leq C_s \|f\|_s \|g\|_s,$$

para todo $f, g \in H^s(\mathbb{T})$.

El sistema lineal asociado a (1) es

$$\begin{cases} \Psi_t = A\Psi \\ \Psi(t=0) = \Psi_0 \end{cases} \tag{5}$$

donde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \rho \\ \phi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \sigma_3 \partial_x + i\delta\partial_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_x^2 \\ 0 & -\frac{1}{M^2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\text{y} \quad \Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \rho_0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}$$

Aplicando Transformada de Fourier a (5) se tiene la siguiente EDO con respecto a t

$$\begin{cases} \widehat{A\Psi}(k,t) = \mathcal{A}(k)\widehat{\Psi}(k,t), & k \in \mathbb{Z}, t > 0 \\ \widehat{\Psi}(k,0) = \widehat{\Psi_0}(k) \end{cases} \tag{7}$$

donde

$$\mathcal{A}(k) = \begin{pmatrix} \sigma_3 ik - i\delta k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \\ 0 & -\frac{1}{M^2} & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ y todo $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}$.

Corolario 2.1. Sean $q, s \in \mathbb{R}$. Entonces

$$A \in \mathcal{B}\left(H^q(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \times H^{s+1}(\mathbb{T}), H^{q-2}(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T})\right). \tag{9}$$

Resolviendo la EDO (7) tenemos que $\widehat{\Psi}(k,t) = e^{\mathcal{A}(k)t}\widehat{\Psi_0}(k)$, para cada $k \in \mathbb{Z}$. Donde

$$e^{\mathcal{A}(k)t} = \begin{pmatrix} e^{it(\sigma_3 k - \delta k^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{k}{M}t\right) & Mk\sin\left(\frac{k}{M}t\right) \\ 0 & -\frac{1}{Mk}\sin\left(\frac{k}{M}t\right) & \cos\left(\frac{k}{M}t\right) \end{pmatrix} \tag{10}$$

Luego, por transformada inversa de Fourier, una solución de (5) formalmente es

$$\Psi(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ikx} e^{\mathcal{A}(k)t}\widehat{\Psi_0}(k) \tag{11}$$

Para demostrar lo anterior, se define la familia de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ como

$$S(t)\Psi_0 = \left(\left(e^{\mathcal{A}(k)t}\widehat{\Psi_0}(k)\right)_{k\in\mathbb{Z}}\right)^{\vee} \tag{12}$$

y se puede demostrar lo siguiente:

Teorema 2.1. Sean $q, s \in \mathbb{R}$. Entonces $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo C_0 en $X = H^q(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \times H^{s+1}(\mathbb{T})$.

Demostración.

$$\widehat{S(t)\varphi}(k) = \begin{pmatrix} e^{it(\sigma_3 k - \delta k^2)}\widehat{\varphi_1}(k) \\ \cos\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_2}(k) + Mk\sin\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_3}(k) \\ -\frac{1}{Mk}\sin\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_2}(k) + \cos\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_3}(k) \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \|S(t)\varphi\|_X &\leq \|\varphi_1\|_q + \|\varphi_2\|_s + M\|\varphi_3\|_{s+1} + C_{M,t}\|\varphi_2\|_s + \|\varphi_3\|_{s+1} \\ &\leq K_{M,t}\|\varphi\|_X \end{aligned} \tag{14}$$

Por medio de Criterio M de Weierstrass se demuestra que

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)\Psi - \Psi\|_X = 0$$

Teorema 2.2. A es el generador infinitesimal del semigrupo C_0 $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Demostración. Vía Teorema del valor medio para derivadas y Criterio M de Weierstrass.

Buen Planteamiento Global de la Ecuación Lineal

Teorema 2.3. Sean $q, s \in \mathbb{R}$. El sistema (5) está bien planteado globalmente en $X = H^q(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}) \times H^{s+1}(\mathbb{T})$. Es decir, para todo $\Psi_0 \in X$, (5) tiene una única solución

$$\Psi \in C([0,\infty); X) \cap C^1([0,\infty); H^{q-2}(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T}) \times H^s(\mathbb{T}))$$

que depende continuamente del dato inicial.

Demostración. Por el Corolario 1.3 y los teoremas recién vistos, solo resta verificar la dependencia continua. En efecto,

$$\|S(t)\varphi - S(t)\varphi'\|_X \leq K_{M,t}\|\varphi - \varphi'\|_X$$

Siguiendo las ideas de C. Obrecht (2015) consideraremos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \partial_t\psi - \sigma_3\partial_x\psi - i\epsilon\delta\partial_x^2\psi + i\epsilon\left\{\sigma_2|\psi|^2 + W\left(\rho + D\partial_x\phi\right)\right\}\psi = 0 \\ \partial_t\rho + \partial_x^2\phi + D\partial_x\left(|\psi|^2\right) + \epsilon L_1 = 0 \\ \partial_t\phi + \frac{1}{M^2}\rho + |\psi|^2 + \epsilon L_2 = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Con condiciones iniciales $\psi(x,0) = \psi_0 \in H^s(\mathbb{T})$, $\rho(x,0) = \rho_0 \in H^s(\mathbb{T})$, $\phi(x,0) = \phi_0 \in H^{s+1}(\mathbb{T})$.

Tomando $M \neq 1$ y escogiendo

$$L_1 = -i\delta\alpha_1\left(\partial_x^2\psi\bar{\psi} - \partial_x^2\bar{\psi}\psi\right), \quad L_2 = -\frac{i}{M}\delta\alpha_2\left(\partial_x\psi\bar{\psi} - \partial_x\bar{\psi}\psi\right).$$

se obtiene

$$\begin{cases} \partial_t\Psi = A\Psi + B(\Psi) \\ \Psi(x,0) = \Psi_0 \end{cases} \tag{16}$$

Donde

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ U \\ V \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \sigma_3\partial_x + i\epsilon\delta\partial_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{M}\partial_x \\ 0 & -\frac{1}{M}\partial_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \rho_0 - \alpha_1|\psi_0|^2 \\ M\partial_x\phi - \alpha_2|\psi_0|^2 \end{pmatrix},$$

$$B(\Psi) = \begin{pmatrix} -i\epsilon\left\{\left(\sigma_2 + W\left(\alpha_1 + \frac{D}{M}\alpha_2\right)\right)|\psi|^2 + W\left(U + \frac{D}{M}V\right)\right\}\psi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 2.4. Sea $s \in \mathbb{R}$. El sistema LINEAL asociado a (16) está bien planteado globalmente en $Y = (H^s(\mathbb{T}))^3$. Es decir, para todo $\Psi_0 \in Y$, el sistema lineal tiene una única solución

$$\Psi \in C([0,\infty); Y) \cap C^1([0,\infty); H^{s-2}(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T}))$$

que depende continuamente del dato inicial.

Demostración. Similar al caso anterior, solo que en esta ocasión

$$A \in \mathcal{B}\left(Y, Y'\right),$$

donde $Y' := H^{s-2}(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T}) \times H^{s-1}(\mathbb{T})$. Y el semigrupo está definido por

$$\widehat{S(t)\varphi}(k) = \begin{pmatrix} e^{it(\sigma_3 k - \epsilon\delta k^2)}\widehat{\varphi_1}(k) \\ \cos\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_2}(k) - i\sin\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_3}(k) \\ -i\sin\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_2}(k) + \cos\left(\frac{k}{M}t\right)\widehat{\varphi_3}(k) \end{pmatrix}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Buen planteamiento local del sistema de Z-R modificado

Teniendo en cuenta el principio de Duhamel debemos estudiar la siguiente ecuación integral

$$\Psi(t) = S(t)\Psi_0 + \int_0^t S(t-\tau)B(\Psi)(\tau)d\tau \tag{17}$$

Teorema 2.5. Sea $\Psi_0 \in Y = (H^s(\mathbb{T}))^3$, $s > \frac{1}{2}$. Existe un tiempo $T\left(s, \|\Psi_0\|_Y\right) > 0$ y una función $\Psi \in C\left([0, T]; Y\right)$ que satisface la ecuación integral (17).

Demostración. Sea $K = K(\|\Psi_0\|_Y) = 4\|\Psi_0\|_Y$. Consideremos la aplicación Φ definida como

$$\Phi\Psi(t) = S(t)\Psi_0 + \int_0^t S(t-\tau)B(\Psi)(\tau)d\tau \tag{18}$$

y el espacio

$$X(T,K) = \left\{\Psi \in C\left([0,T];Y\right) : \sup_{t\in[0,T]} \|\Psi(t)\|_Y \leq K\right\}$$

El objetivo es demostrar que, para cierto $T > 0$, Φ es una contracción en $X(T,K)$ y luego, usar el Teorema de Punto fijo de Banach para concluir que existe la función $\Psi \in C\left([0,T];Y\right)$ que satisface la ecuación integral.

Teorema 2.6. Sea $s > \frac{1}{2}$. Entonces el PVI (16) es equivalente a la ecuación integral (17). Si $\Psi \in C([0, T]; Y)$ y satisface (17), entonces Ψ es solución de la ecuación diferencial (16) y $\Psi \in C^1([0, T]; Y')$.

Demostración. Aplicando los resultados del **Teorema 1.1.** y las propiedades de A.

Buen planteamiento local del sistema de Z-R modificado

Con los resultados anteriores, ya se puede demostrar el teorema principal.
Teorema 2.7: El PVI (16) es localmente bien planteado en $Y = \left(H^s(\mathbb{T})\right)^3, s > \frac{1}{2}$. Es decir, para todo $\Psi_0 \in Y$ existen $T > 0$ y una única

$$\Psi \in C\left([0, T]; Y\right) \cap C^1\left([0, T]; Y'\right)$$

que satisface (16). Además, la aplicación dato inicial-solución $\Psi_0 \in Y \to \Psi \in C\left([0, T]; Y\right)$ es continua en el siguiente sentido: Sean $\Psi_{0,n} \in Y, n = 1, 2, 3, \ldots, \infty$, tales que $\Psi_{0,n} \xrightarrow{Y} \Psi_0$, cuando $n \to \infty$, y sean $\Psi_n \in C\left([0, T_n]; Y\right)$ soluciones de (22) construidas en el **Teorema 2.5.** con $\Psi_n(x, 0) = \Psi_{0,n}$. Entonces, para todo $T' \in (0, T)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N$ implica que $\Psi_n \in C\left([0, T']; Y\right)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T']} \left\|\Psi_n(t) - \Psi(t)\right\|_Y = 0$$

Buen planteamiento local del sistema de Z-R modificado

Demostración. **Existencia.**

Unicidad. Lema (Gronwall). Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 0$ y $g \in C([a, b]; \mathbb{R})$ tal que

$$g(x) \leq \alpha + \beta \int_a^x g(s)\, ds.$$

Entonces, $g(x) \leq \alpha e^{\beta(x-a)}$, *para todo* $x \in [a, b]$.
Por lo visto en el paso 3 de la demostración de **Teorema 2.5.**

$$\|\Psi_1(t)-\Psi_2(t)\|_Y \leq 2\|\Psi_{0,1}-\Psi_{0,2}\|_Y+2\epsilon\mathcal{K}^* \int_0^t \|\Psi_1(\tau)-\Psi_2(\tau)\|_Y d\tau \quad (19)$$

Usando la desigualdad de Gronwall se llega a que

$$\|\Psi_1(t) - \Psi_2(t)\|_Y \leq 2\|\Psi_{0,1} - \Psi_{0,2}\|_Y e^{2\epsilon\mathcal{K}^* t}, \quad \forall t \in [0, T] \qquad (20)$$

Dependencia continua. Sea $\epsilon_1 > 0$. Usando propiedades de continuidad se puede llegar a que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T']} \|\Psi_n(t) - \Psi(t)\|_Y &< 2\,\|\Psi_{0,n} - \Psi_0\|_Y \, e^{2\epsilon K_n^* T'} \\
&< 2\frac{\epsilon_1}{2e^{2\epsilon K' T'}} e^{2\epsilon K' T'} = \epsilon_1, \quad \forall n > N
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Esto implica que

$$
\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T']} \|\Psi_n(t) - \Psi(t)\|_Y = 0
$$

ya que $\epsilon_1 > 0$ fue arbitrario.

Volver al sistema modificado

Usando algunas técnicas básicas, se puede demostrar que el sistema (16) y el sistema modificado (15) son equivalentes, luego

Teorema 2.8. Sea $s > 1/2$. El sistema

$$\begin{cases} \partial_t\psi - \sigma_3\partial_x\psi - i\epsilon\delta\partial_x^2\psi + i\epsilon\left\{\sigma_2|\psi|^2 + W\left(\rho + D\partial_x\phi\right)\right\}\psi = 0 \\ \partial_t\rho + \partial_x^2\phi + D\partial_x\left(|\psi|^2\right) + \epsilon L_1 = 0 \\ \partial_t\phi + \frac{1}{M^2}\rho + |\psi|^2 + \epsilon L_2 = 0 \end{cases}$$

Con condiciones iniciales $\psi(x,0) = \psi_0 \in H^s(\mathbb{T})$, $\rho(x,0) = \rho_0 \in H^s(\mathbb{T})$, $\phi(x,0) = \phi_0 \in H^{s+1}(\mathbb{T})$ y

$$L_1 = -i\delta\alpha_1\left(\partial_x^2\psi\bar{\psi} - \partial_x^2\bar{\psi}\psi\right), \quad L_2 = -\frac{i}{M}\delta\alpha_2\left(\partial_x\psi\bar{\psi} - \partial_x\bar{\psi}\psi\right).$$

Está bien planteado localmente.

Problema abierto

Basados en C. Obrecht (2015) y H. Luong-J. C. Saut (2018) aún queda por demostrar el buen planteamiento local vía Sistemas Hiperbólicos Simétricos del sistema original, cuando se incluye el parámetro pequeño ϵ

$$\begin{cases} \partial_t\psi - \sigma_3\partial_x\psi - i\epsilon\delta\partial_x^2\psi + i\epsilon\left\{\sigma_2|\psi|^2 + W\left(\rho + D\partial_x\phi\right)\right\}\psi = 0 \\ \partial_t\rho + \partial_x^2\phi + D\partial_x\left(|\psi|^2\right) = 0 \\ \partial_t\phi + \frac{1}{M^2}\rho + |\psi|^2 = 0 \end{cases},$$

Referencias

Saut, J.-C. and Ponce, G.
Well-posedness for the Benney-Roskes/Zakharov-Rubenchik system,
Discrete Cont. Dynamical Systems, 13(3), 811–825, 2005.

Obrecht, C.
Sur l'approximation modulationnelle du problème des ondes de surface: Consistance et existence de solutions pour les systèmes de Benney-Roskes/Davey-Stewartson à dispersion exacte,
Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2015.

Lannes, D.
The Water Waves Problem: Mathematical Analysis and Asymptotics,
AMS, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 188, 2013.

Luong, H., Saut, J.-C., and Smith, D.
On the Cauchy problem for the Zakharov–Rubenchik/Benney–Roskes system,
Communications on Pure and Applied Analysis, Feb. 2018.

Pazy, A.
Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,
Springer-Verlag, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, 1983.

Agradeciemientos

¡MUCHAS GRACIAS POR TU ATENCIÓN!