

Perturbaciones de rango uno no acotadas de operadores autoadjuntos

Mateo Bahos Orjuela

Universidad de los Andes

Facultad de Ciencias

Departamento de Matemáticas

6 de junio de 2025

Objetivo

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y A un operador autoadjunto, las perturbaciones de rango uno no acotadas de A vienen dadas de la forma

$$B = A + \phi(\cdot)\psi$$

donde $\psi \in \mathbb{H}$ y ϕ es un funcional lineal no acotado.

El objetivo de esta presentación será, bajo ciertas condiciones sobre A y ϕ , obtener la mayor cantidad de información posible sobre el espectro de B .

Preliminares

En el artículo [An analysis of non-selfadjoint first-order differential operators with non-local point interactions](#) se estudia el operador

$$A_{\min} : D(A_{\min}) := \{f \in H^1(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$$

$$(A_{\min}f)(x) = if'(x) + V(x)f(x)$$

donde $V \in L^\infty(0, 2\pi)$. Su objetivo es analizar el espectro de las extensiones de $A_{\min}$ que vienen de la forma:

$$A_{p,k} : D(A_{p,k}) := \{f \in H^1(0, 2\pi) : f(0) = kf(2\pi)\}$$

$$(A_{p,k})(x) = if'(x) + V(x)f(x) + f(2\pi)k(x)$$

donde $k \in L^2(0, 2\pi)$.

Preliminares

Si $V_l = \text{Im}(V)$ y denotamos V_l el operador de multiplicación por V_l , las extensiones $A_{p,k}$ resultan ser maximalmente disipativas si y solo si $k \in \text{Im}(V^{\frac{1}{2}})$ y

$$1 - |p|^2 \geq \frac{1}{2} \|V_l^{-\frac{1}{2}} k\|^2$$

Aún más, todas las extensiones maximalmente disipativas tienen la forma $A_{p,k}$.

Se introducen también los siguientes operadores

$$P_{1,k} : D(P_{1,k}) := \{f \in H^1(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi)\}$$

$$(P_{1,k})(x) = if'(x) + f(2\pi)K(x)$$

donde $K \in L^2(0, 2\pi)$.

Preliminares

Se demostró que si $p \neq 0$ existen $K \in L^2(0, 2\pi)$, $\eta \in \mathbb{C}$ y un isomorfismo continuo $W : L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi)$ tal que

$$W^{-1}(P_{1,K} + \eta)W = A_{p,k}$$

De lo anterior vemos que $P_{1,k}$ guarda toda la información de $\sigma(A_{p,k})$.

Notar que la familia de operadores $P_{1,K}$ tienen todos el mismo dominio y son perturbaciones de rango uno del operador autoadjunto $P_{1,0}f = if'$.

Consideramos $\phi : D(\phi) \subseteq L^2(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\phi(f) = f(2\pi)$ Ciertamente ϕ es un funcional acotado y $D(P_{1,0}) \subseteq D(\phi)$.

Preliminares

Tenemos lo siguiente

- $\sigma(P_{1,0}) = \mathbb{Z}$ y todos sus autovalores son simples,
- Las autofunciones son $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}$,
- Si $\lambda \notin \mathbb{Z}$ entonces

$$(P_{1,0} - \lambda)^{-1} f = -ie^{-i\lambda x} \left(\int_0^x f(t) e^{-i\lambda t} dt + \frac{1}{e^{2\pi i\lambda} - 1} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\lambda t} dt \right),$$

- $D(P_{1,0}) \subseteq D(\phi)$,
- La composición de ϕ con la resolvente de $P_{1,0}$ es acotada.

Es natural generalizar lo anterior de la siguiente manera:

Conceptos

Definición

Sean $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert, A un operador autoadjunto, ϕ un funcional y $\psi \in \mathbb{H}$. Si:

- El espectro de A es discreto, **simple** y **separado**, denotaremos $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde $\lambda_n < \lambda_{n+1}$.
- $D(A) \subseteq D(\phi)$.
- $\phi \circ (A - \lambda)^{-1}$ es acotado para al menos un $\lambda \in \rho(A)$ y por ende para todo λ en la resolvente.

Se define $B : D(A) \rightarrow \mathbb{H}$ como:

$$B = A + f(\cdot)\psi$$

Espectro de B

Definición

Se define la función característica de B como:

$$F : \rho(A) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$F(\lambda) = 1 + \phi((A - \lambda)^{-1}\psi)$$

Teorema

Sea $\lambda \in \rho(A)$ tal que $F(\lambda) \neq 0$. Entonces $\lambda \in \rho(B)$ y

$$(B - \lambda)^{-1}f = (A - \lambda)^{-1}f - \frac{1}{F(\lambda)}((\phi \circ (A - \lambda)^{-1})f)(A - \lambda)^{-1}\psi$$

Corolario

El espectro de B es puramente discreto.

Espectro de B

Teorema

Sea $\lambda \in \rho(A)$. Entonces $\lambda \in \rho(B)$ si y solo si $F(\lambda) = 0$. En este caso $\ker(B - \lambda) = \text{span}\{(A - \lambda)^{-1}\psi\}$.

Sea $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de autovectores de A y escribamos

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n v_n$$

entonces:

Teorema

Sea $\lambda = \lambda_n \in \sigma(A)$. Entonces $\lambda_n \in \sigma(B)$ si y solo si $\phi(v_n)a_n = 0$. Aún más, $\dim \ker(B - \lambda_n) = 2$ si y solo si $\phi(v_n) = a_n = F(\lambda_n) = 0$, En caso contrario $\dim \ker(B - \lambda_n) = 1$

Espectro de B

Teorema

La función característica F es analítica en su dominio y

$$F^{(n)}(\lambda) = n! \phi((A - \lambda)^{-(n+1)} \psi).$$

Por lo anterior:

Teorema

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces:

- *Si $\lambda \in \rho(A)$ es tal que $F(\lambda) = 0$ y denotamos l como la multiplicidad de λ como cero de F . Entonces los vectores*

$$\{(A - \lambda)^{-k} \psi\}_{1 \leq k \leq l}$$

forman una cadena de Jordan de longitud maximal y por tanto la multiplicad algebraica de λ es l .

- *Si $\lambda = \lambda_n$ entonces la multiplicidad algebraica de λ_n es $l + 1$.*

Ejemplo

Si $\mathbb{H} = L^2(0, 2\pi)$, $Af = P_{1,0}f = if'$ y $\phi(f) = f(2\pi)$ entonces

$$Bf = P_{1,K}f = P_{1,0}f + \phi(f)K.$$

La función característica de $P_{1,K}$ viene dada por:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= 1 + (\phi \circ (P_{1,0} - \lambda)^{-1})\psi \\ &= 1 - ie^{-i\lambda 2\pi} \left(\frac{e^{2\pi i\lambda}}{e^{2\pi i\lambda} - 1} \right) \int_0^{2\pi} K(t)e^{-i\lambda t} dt = 0 \end{aligned}$$

obteniendo la ecuación

$$e^{2\pi i\lambda} - 1 + \int_0^{2\pi} e^{-i\lambda t} (-K(t)) dt = 0.$$

Ejemplo

Para $\lambda = n \in \sigma(P_{1,0})$ tenemos que $\lambda_n \in \sigma(P_{1,K})$ si y solo si

$$\phi(v_n)a_n = 0$$

En nuestro caso

$$\phi\left(\frac{e^{-inx}}{\sqrt{2\pi}}\right)a_n = 0$$

obteniendo que $n \in \sigma(P_{1,K})$ si y solo si

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} K(t) dt = 0.$$

Comportamiento asintótico

Por teorema espectral

$$(A - \lambda)^{-1} \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda} v_n$$

Si suponemos que

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{|\phi(v_n)|\} < \infty$$

y $|\lambda_n - \lambda_m| \geq d$ para algún $d > 0$ y todo $n, m \in \mathbb{N}$ entonces

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \phi(v_n)}{\lambda_n - \lambda}$$

converge a $F(\lambda)$. Aún más, si para $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2})$ definimos $R(\varepsilon) := \mathbb{C} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_\varepsilon(\lambda_n)$ entonces

$$F(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \phi(v_n)}{\lambda_n - \lambda}$$

converge uniformemente en $R(\varepsilon)$.

Comportamiento asintótico

Lema

Sea $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2})$. Salvo finitos, todos los autovalores de B yacen en $B_\varepsilon(\lambda_n)$.

Lema

Sea $\varepsilon \in (0, \frac{d}{2})$. Para n suficientemente grande existe un único autovalor de B algebraicamente simple que vive en $B_\varepsilon(0, \frac{d}{2})$.

Teorema

Existe una numeración $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\sigma(B)$ tal que:

- Cada u_n se repite tantas veces como su multiplicidad algebraica.
-

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - \lambda_n|^2 < \infty.$$

Preguntas

- ¿Los vectores y autovectores de B forman una base de Riesz?
- ¿Que tanto cambia el comportamiento asintótico del espectro de B si no suponemos que los autovalores de A son separados?

Bibliografía I



Dobosevych, O., & Hryniv, R. (2021). Direct and inverse spectral problems for rank-one perturbations of self-adjoint operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 93(2):Paper No. 18, 18, 2021.



Dobosevych, O., & Hryniv, R. (2021). Spectra of rank-one perturbations of self-adjoint operators. *Linear Algebra and its Applications*, 609:339-364, 2021.



Donoghue Jr, W. F. (1965). On the perturbation of spectra. *Communications on pure and Applied Mathematics*, 18(4), 559-579.



Fischbacher, C., Paraiso, D., Povey-Rowe, C., & Zimmerman, B. (2025). An analysis of non-selfadjoint first-order differential operators with non-local point interactions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 549(2).



Schmüdgen, K. Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space, vol. 265 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, Dordrecht, (2012).

Bibliografía II



Simon, B. Operator theory (Vol. 4). American Mathematical Soc., (2015).



Simon, B. (1995). Spectral analysis of rank one perturbations and applications. Centre de Recherches Mathematiques, Proc. Lecture Notes 8. 109-149.



Weidmann, J. Linear operators in Hilbert spaces, vol. 68 Of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, (1980).