Renormalización de la energía Casimir mediante la función Zeta de Riemann para configuraciones toroidales

Diego F. Cardona[1], Hector I. Arcos[2]

[1] *diego-cardona-pro@utp.edu.co*, [2] *hiarcosv@utp.edu.co*, *Departamento de Física, Universidad Tecnológica de Pereira*

Universidad Tecnológica de Pereira

GyTU
Grupo de Investigación Gravitación y Teorías Unificadas

Abstract

Starting with a massless scalar field confined in a toroidal spacetime manifold, the Casimir energies were found for different border conditions. For the time section, a periodic condition was taken with a period β. In the calculations, the limit of low temperature for the system was considered, where the temperature parameter is defined as T= $1/\beta$. In particular, the cases T^3 and $T^3 \times \mathbb{R}^1$ were worked out and the finite energies were found through the Riemann zeta function renormalization technique. The values obtained for these energies depend both on spacetime dimensions and the topology of the manifold.

Introducción

El efecto Casimir, puede definirse como las energías resultantes del vacío, cuando se analiza desde la perspectiva de la teoría cuántica de campos.

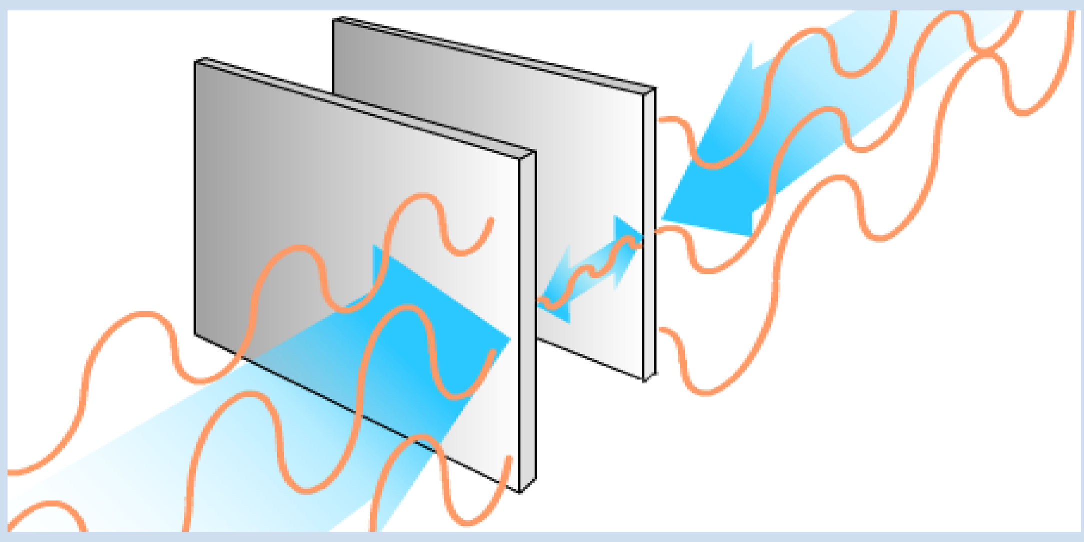

Figura 1. Efecto Casimir entre dos placas paralelas que se encuentran a una distancia muy corta, lo que manifiesta fuerzas de atracción asociadas al vacío cuántico.

Dando una definición más exacta, es la energía que surge de imponer condiciones de frontera sobre un campo cuantizado, el cual se encuentra en su estado de punto cero, donde la última condición es la que asociamos al vacío cuántico. Pero en teoría cuántica de campos, uno de los mayores obstáculos es el tratar con términos divergentes, los cuales se resuelven con técnicas de renormalización y una de estas es la función Zeta de Riemann.

Energía entre placas paralelas: el primer cálculo que se tiene sobre el efecto Casimir, fue hecho por H. Casimir (1909-2000) sobre un campo electromagnético que esta delimitado por dos placas paralelas no conductoras.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\sum_n \omega_n \tag{2}$$

Esta energía del vacío, tiene un caracter claramente divergente, ya que la suma de las frecuencias propias del campo esta definida como $-\infty < n < \infty$. Por lo cual, para renormalizar, utilizamos la siguiente relación de la función Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{-s} \tag{3}$$

Relación que toma los valores propios y los asocia con valores de la función Zeta de Riemann, con s $\in \mathbb{C}$. En ultimas para nuestro caso, donde los valores propios vienen siendo las energías, llevamos (3) a la forma:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}\zeta(-1/2) \tag{4}$$

Con esto la energía toma el valor finito de:

$$\varepsilon = -\frac{\pi^2}{720L^4}$$

Donde L es la distancia de separación entre placas, lo cual muestra una dependencia dimensional para la energía.

Referencias

- E. Elizalde. (1988). Spectrum of the Casimir effect on a torus. *Z.Phys.C-Particles and Fields, 44*(471-478).
- Kirsten Klaus. Basic zeta functions and some applications in physics. arXiv:1005.2389. (2010).

Energías para variedades toroidales

Para nuestro caso, el sistema parte de confinar un campo escalar sin masa φ, dentro de una estructura toroidal que cuenta con tres dimensiones espaciales y una temporal con periodo β. Para describir la dinámica propia del campo escalar, utilizamos la ecuación de Klein-Gordon, en la cual podemos analizar diferentes tipos de condiciones de frontera. Con esto, podemos determinar las energías del estado base para dicho sitema.

$$\varepsilon_0 = \frac{L_3}{2\pi}\sum_{n_1,n_2\in\mathbb{N}}\int_0^{\infty}\left[k^2 + \left(\frac{2\pi n_1}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi n_2}{L_2}\right)^2\right]^{-s} dk \tag{1}$$

La ecuación (1), representa la energía de un caso particular en el cual uno de los radios, en este caso L_3, tiende a ser un valor muy grande. Energía que podemos manipular de tal forma que utilizando la relación (4) encontramos su correspondiente finita:

$$\varepsilon = -0,472024L_3\left[\frac{1}{L_1^2} + \frac{1}{L_2^2}\right]$$

Donde L_1 y L_2 hacen parte de los tres radios que conforman a T^3.
Siguiendo esta misma lógica, podemos llevar acabo una serie de variaciones en las condiciones de frontera, para determinar diferentes energías que dan espacio a distintas interpretaciones físicas.

Resultados obtenidos

En un principio se obtuvieron energías con carácter negativo para formas toroidales que varían en sus condiciones de frontera (Figura 2). Luego, se desarrollo un procedimiento similar pero considerando cambios más fuertes en las condiciones de frontera que forman el toro, recordando que podemos formar dicha figura partiendo de un rectángulo con los bordes orientados en igual sentido, así que para el último caso orientamos en sentidos opuestos los bordes del rectángulo inicial, dando la aparición de energías positivas.

Producto Cartesiano	Condición de frontera	Valor aproximado de la energía Casimir
T^3	periodica en (x,y)	$-0{,}261799\left(\frac{1}{L_1^2}+\frac{1}{L_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1$	periodica en (x,y) y se anula en (z)	$-0{,}0068539\,\frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1,L_2\to\infty,\infty}$	periódica en (x,y,z)	$-0{,}054831\frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3\to\infty}$	periódica en (x,y,z)	$-0{,}472024L_3\left(\frac{1}{L_1^2}+\frac{1}{L_2^2}\right)$

Producto Cartesiano	Valor aproximado de la energía Casimir
T^3	$1{,}047198\left(\frac{1}{L_1^2}+\frac{1}{L_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1$	$-0{,}397526\frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_1,L_2\to\infty,\infty}$	$-3{,}180208\frac{L_1 L_2}{L_3^3}$
$T^3 \times \mathbb{R}^1 \lim_{L_3\to\infty}$	$0{,}45975L_3\left(\frac{1}{L_1^2}+\frac{1}{L_2^2}\right)$

Figura 2. La primera tabla corresponde a los primeros resultados obtenidos y la segunda corresponde al cambiar la orientación inicial del rectangulo con el que se forma el toro. En la segunda tabla se mantienen las condiciones sobre el campo, pero la forma global del espacio a cambio.

Uno de los grandes resultados que surgen es que se logró obtener energías con signo positivo o de caracter expansivo. Resultado que si lo hacemos corresponder en cosmología con un sistema en el cual el espacio obtenido es la forma que puede tener el universo, nos sirve para argumentar el sentido expansivo de este.

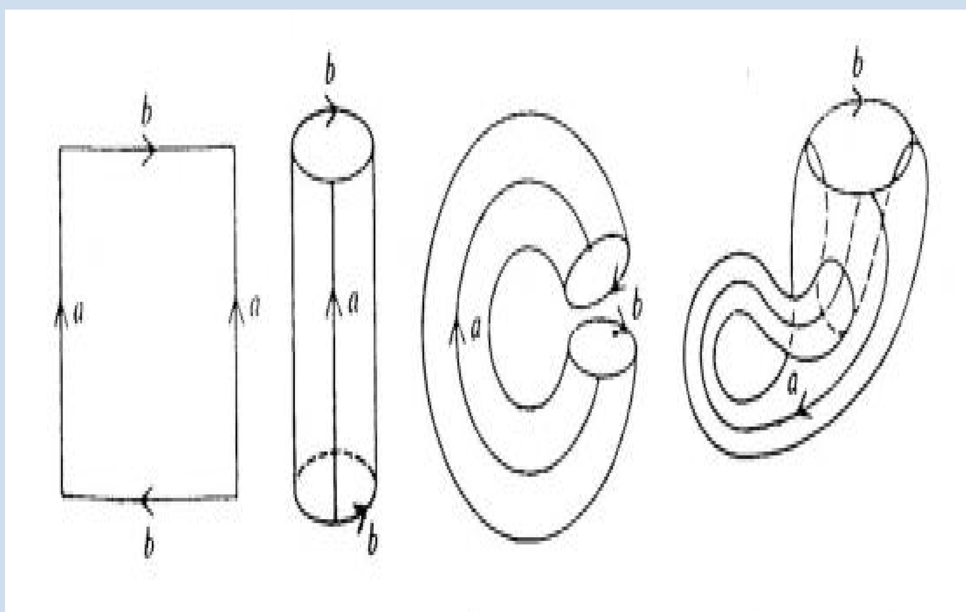

Figura 3. Representación esquemática de cambiar la orientación de dos de los lados en un rectángulo. Al intentar unir todos los extremos iguales no resulta un toro, sino una botella de Klein.

Un último y aun más interesante resultado, es considerar que para los tres radios del toro, se presenta en cada uno de ellos una expansión a valores muy grandes

$$\varepsilon = (0.0062222 - 0.0124445i)L_1L_2L_3 \tag{5}$$

Este resultado de una energía compleja, se puede interpreta como una energía inestable, en la cual su tiempo de vida antes de decaer esta representado como $\tau \approx \hbar/\Gamma$. Donde Γ aparece como la parte imaginaria de la energía ($\varepsilon = \varepsilon_0 + \Gamma i$). Además, es interesante el hecho de que igual que resultados anteriores la energía es expansiva.

Conclusiones

Es sabido, que la energía de Casimir es de carácter negativo para configuraciones toroidales, sin embargo al modificar el espacio, se pudieron obtener energías positivas. Este resultado al aplicarse a un modelo cosmológico del universo da sustento a la aparición de fuerzas de gran escala, que sustentan la expansión del universo. Además, en el caso del resultado con energía compleja, aparece la interpretación de que esta expansión del universo puede cambiar en el tiempo. Sería interesante conectar este resultado con el periodo inflacionario en los momentos iniciales del universo.