Una versión de un Teorema de Paley - Wiener para núcleos definidos positivos a valores escalares

Arnaldo de la Barrera Correa- Universidad De Pamplona, Colombia

Escuela de Fisco Matemática, Universidad de los Andes, Bogotá- Colombia, Mayo 2016

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es presentar una prueba de un teorema de estabilidad para núcleos definidos a valores escalares. Este resultado es una versión de un resultado clásico de Paley - Wiener referente a bases de Riesz.

Bases equivalentes en espacios de Banach

Sea $\{x_n\}$ una base de Schauder en el espacio de Banach $\mathbf{X}$. Sea $\mathbf{T} \in \mathcal{L}(\mathbf{X})$ un operador acotado invertible con inverso acotado. Sea $\{y_n\}$ definida por

$$y_n = Tx_n \qquad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

entonces $\{y_n\}$ también es una base de Schauder de $\mathbf{X}$.
Dos bases que satisfacen una relación de este tipo se dice que son *bases equivalentes*.

Bases de Riesz

En un espacio de Hilbert separable son muy importantes las bases ortonormales. Otras bases muy destacadas y menos conocidas son las llamadas *bases de Riesz*, para más detalles sobre este tema se puede consultar el libro de Young [2].
Una base para un espacio de Hilbert es una *base de Riesz* si es equivalente a una base ortonormal, es decir, si es obtenida de una base ortonormal por medio de un operador lineal acotado invertible con inverso acotado.

Productos internos equivalentes, sucesiones completas, sucesiones biortogonales y sucesiones mínimas

Sean $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, dos productos internos sobre un espacio vectorial. Se dice que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ son *productos internos equivalentes* cuando generan normas equivalentes.
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert.

(a) Se dice que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *completa* en $\mathcal{H}$ si $\overline{\operatorname{span}}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathcal{H}$.

(b) Se dice que las sucesiones $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son *biortogonales* si

$$\langle x_n, y_m\rangle = \delta_{nm} \qquad \text{para todo } n, m \in \mathbb{N}.$$

(c) Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en un espacio de Hilbert es *minimal* si, para cada $p \in \mathbb{Z}$, $x_p \notin \overline{\operatorname{span}}\{x_n : n \in \mathbb{Z},\ n \neq p\}$.
Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión minimal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces existe una sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}$ que es *biortogonal* a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, esto es $\langle x_n, h_m\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{nm}$.

Caracterización de las bases de Riesz

Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert separable y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{H}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $\mathcal{H}$.

(ii) Existe un producto interior $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ sobre el espacio lineal $\mathcal{H}$, equivalente al producto interior sobre $\mathcal{H}$ tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal para $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$.

(iii) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completa en $\mathcal{H}$ y existen constantes $A, B > 0$, $A \le B$ tales que

$$A\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2 \le \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n\right\|^2 \le B\sum_{n\in\mathbb{N}}|a_n|^2$$

para toda sucesión de escalares $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con soporte finito.

(iv) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completa en $\mathcal{H}$ y su matriz de Gram

$$(\langle x_i, x_j\rangle)_{i,j=1}^{\infty}$$

es la matriz de un operador acotado invertible en $l^2(\mathbb{N})$.

(v) La sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completa en $\mathcal{H}$ y posee una sucesión biortogonal completa $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle x, x_n\rangle|^2 < \infty \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}}|\langle x, y_n\rangle|^2 < \infty \qquad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{H}$$

Este Teorema y su prueba puede verse en [2].

Teorema de Paley - Wiener

El criterio fundamental de estabilidad, e históricamente el primero, se debe a Paley -Wiener . Este se basa en el hecho elemental de que un operador lineal acotado $\mathbf{T}$ sobre un espacio de Banach es invertible cuando

$$\|I - T\| < 1.$$

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder para un espacio de Banach $\mathbf{X}$, y suponga que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $\mathbf{X}$ tal que

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n(x_n - y_n)\right\| \le \lambda \left\|\sum_{n=1}^{N} c_n x_n\right\|$$

para alguna constante λ, con $0 \le \lambda < 1$ y para cualquier sucesión de escalares $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder para $\mathbf{X}$ equivalente a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
Este teorema y su prueba pueden verse en el libro de Young [2, página 38].

Teorema de Paley- Wiener en espacios de Hilbert

Sea $\{e_n\}$ una base ortonormal para un espacio de Hilbert $\mathbf{H}$ y sea $\{z_n\} \subseteq \mathbf{H}$ una sucesión que satisface

$$\left\|\sum_n c_n(e_n - z_n)\right\| \le \lambda \left(\sum_n |c_n|^2\right)^{1/2} \tag{1}$$

para alguna constante λ, con $0 \le \lambda < 1$ y para toda sucesión de escalares $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $\mathbf{H}$.

Núcleos definidos positivos

Los núcleos definidos positivos aparecen de manera natural en muchos resultados y problemas tanto de análisis como de probabilidades, en los que juegan un rol distinguido. Esta noción permite considerar, de manera unificada, problemas de ambas áreas.
Sea $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo. Se dice que K is *definido positivo* si

$$\sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m \overline{a_n} \ge 0 \qquad \text{para toda sucesion} \quad \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C} \quad \text{con soporte finito.}$$

Núcleos definidos positivos y el espacio de Hilbert asociado

Sea $\mathcal{E}_o$ el espacio de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ con soporte finito.
Sea $K : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ un núcleo definido positivo. Para $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $b = \{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathcal{E}_o$ se define

$$\langle a, b\rangle = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m \overline{b_n}.$$

Se tiene que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es una forma sesquilineal, posiblemente degenerada, definida positiva en $\mathcal{E}_o$.
Sea $\mathcal{E}_{o,K}$ el espacio pre-Hilbert obtenido después de haber pasado al cociente natural en $\mathcal{E}_o$ y sea $\mathcal{H}_K$ la completación de $\mathcal{E}_{o,K}$.

El producto y la norma en $\mathcal{H}_K$ se denotarán por $\langle\ ,\ \rangle_{\mathcal{H}_K}$ y $\|\ \|_{\mathcal{H}_K}$ respectivamente. Esta norma se llamará *la norma inducida por* K.
Para $n \in \mathbb{Z}$ sea $\delta^{(n)}$ el elemento de $\mathcal{E}_o$ definido por

$$\delta^{(n)}_m = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ una sucesión con soporte finito.
La clase de equivalencia del elemento $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^{(n)}$ se denotará por $\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^{(n)}\right]_K$ y se tiene que

$$\left\|\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^{(n)}\right]_K\right\|^2_{\mathcal{H}_K} = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m \overline{a_n}.$$

Núcleos definidos positivos equivalentes

Sean $K_1, K_2 : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dos núcleos definidos positivos. Se dice que K_1 y K_2 son *equivalentes* si las correspondientes normas pre-Hilbert inducidas, $\|\ \|_{\mathcal{H}_{K_1}}$ y $\|\ \|_{\mathcal{H}_{K_2}}$, en el espacio $\mathcal{E}_o$ son equivalentes.

Observación. De la definición anterior y la construcción del espacio $\mathcal{H}_K$ sigue que dos núcleos definidos positivos $K_1, K_2 : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ son *equivalentes* si existen dos constantes A, B con $0 < A \le B$ tales que

$$A\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \le \|[h]_{K_2}\|^2_{\mathcal{H}_{K_2}} \le B\|[h]_{K_1}\|^2_{\mathcal{H}_{K_1}} \quad \text{para} \quad h \in \mathcal{E}_o.$$

Caracterización de núcleos definidos positivos

Sean $K_1, K_2 : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ dos núcleos definidos positivos. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) Los núcleos K_1 y K_2 son equivalentes.

(ii) Existe una aplicación lineal acotada biyectiva, con inversa acotada,

$$\Phi : \mathcal{H}_{K_1} \to \mathcal{H}_{K_2}$$

tal que

$$\Phi[\delta^{(n)}]_{K_1} = [\delta^{(n)}]_{K_2} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

(iii) Existen dos constantes A, B con $0 < A \le B$ tales que

$$A \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_1(n,m)\, a_m \overline{a_n} \le \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_2(n,m)\, a_m \overline{a_n} \le B \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_1(n,m)\, a_m \overline{a_n}$$

para toda sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.

Una versión del Teorema de Paley- Wiener para núcleos definidos positivos

El resultado siguiente es una versión del Teorema de Paley-Wiener . Un resultado similar para procesos estocásticos fue dado en el artículo de Strandell [3, Teorema 2].
Sea K un núcleo definido positivo.
Si $\{g_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \subset \mathcal{H}_K$ satisface

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\left([\delta^{(n)}]_K - g_n\right)\right\|_{\mathcal{H}_K} \le \lambda \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n[\delta^{(n)}]_K\right\|_{\mathcal{H}_K}$$

para toda sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$, donde $\lambda \in (0,1)$, entonces el núcleo K_1 definido por

$$K_1(n,m) = \langle g_n, g_m\rangle_{\mathcal{H}_K}$$

es equivalente a K.

Demostración

Definamos el operador $J : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ como sigue

$$J\left(\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^{(n)}\right]_K\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\left([\delta^{(n)}]_K - g_n\right)$$

para cada sucesión con soporte finito $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$.
Es fácil probar que J es un operador lineal.
Además de la hipótesis se tiene que

$$\left\|J\left(\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^{(n)}\right]_K\right)\right\|_{\mathcal{H}_K} \le \lambda \left\|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n[\delta^{(n)}]_K\right\|_{\mathcal{H}_K}.$$

Luego J es un operador lineal acotado tal que $\|J\| \le \lambda < 1$.
Sea $f \in \mathcal{H}_K$ dada por $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n[\delta^{(n)}]_K$.
Se tiene que

$$(I - J)(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n g_n \quad \text{y} \quad (1-\lambda)\|f\|_{\mathcal{H}_K} \le \|(I-J)f\|_{\mathcal{H}_K} \le 2\|f\|_{\mathcal{H}_K},$$

por lo tanto

$$(1-\lambda)^2 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m \overline{a_n} \le \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K_1(n,m)\, a_m \overline{a_n} \le 4 \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} K(n,m)\, a_m \overline{a_n}.$$

Referencias

R. Bruzual, A. De la Barrera, M. Domínguez. *On positive definite kernels, related problems and applications.* Extracta Mathematicae, Vol. 29, N. 1-2, (2014), 97-115.

R. M. Young. An introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York, 1980.

G. Strandell, Stationary in Hilbert spaces, U.U.D.M. Report 2001:31, ISSN 1101-3591, Department of