TERMODINÁMICA DE UN GAS DE FOTONES EN LA VECINDAD DE UNA SUPERFICIE DE SCHWARZSCHILD

Wilson Alexander Rojas Castillo
Escuela de Física Matemática 2010
Métodos del Análisis Funcional en Relatividad General y Mecánica Cuántica

Mayo 2010

MOTIVACIÓN

La presente investigación se halla sustentada sobre las siguientes cuestiones físicas que aún están abiertas a debate:

1. Cuál es origen mecánico cuántico de la entropía *Bekenstein-Hawking* de los agujeros negros?

MOTIVACIÓN

La presente investigación se halla sustentada sobre las siguientes cuestiones físicas que aún están abiertas a debate:

1. Cuál es origen mecánico cuántico de la entropía *Bekenstein-Hawking* de los agujeros negros?
2. En el desarrollo de la investigación acerca de la termodinámica de agujeros negros, el origen mecánico cuántico de la *entropía de Bekenstein-Hawking* sigue siendo un problema abierto.

MOTIVACIÓN

La presente investigación se halla sustentada sobre las siguientes cuestiones físicas que aún están abiertas a debate:

1. Cuál es origen mecánico cuántico de la entropía *Bekenstein-Hawking* de los agujeros negros?
2. En el desarrollo de la investigación acerca de la termodinámica de agujeros negros, el origen mecánico cuántico de la *entropía de Bekenstein-Hawking* sigue siendo un problema abierto.
3. Se puede hacer una descripción conceptual y operativa de la entropía en un escenario gravitacional extremo?

TERMODINÁMICA DE LA RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Esta presentación tratará sobre tres aspectos de la radiación electromagnética:

1. Se consideran las correcciones gravitacionales, en el marco de la Teoría General de la Relatividad, de la termodinámica de la radiación electromagnética cerca a una superficie de Schwarzschild; con base en el *punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz* introducido por Einstein en 1905.

TERMODINÁMICA DE LA RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Esta presentación tratará sobre tres aspectos de la radiación electromagnética:

1. Se consideran las correcciones gravitacionales, en el marco de la Teoría General de la Relatividad, de la termodinámica de la radiación electromagnética cerca a una superficie de Schwarzschild; con base en el *punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz* introducido por Einstein en 1905.
2. Propiedades térmicas de la radiación electromagnética tales como: energía libre de Helmhotlz (F) y entropía (S) entre otras.

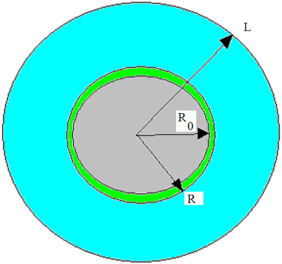
TERMODINÁMICA DE LA RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

Esta presentación tratará sobre tres aspectos de la radiación electromagnética:

1. Se consideran las correcciones gravitacionales, en el marco de la Teoría General de la Relatividad, de la termodinámica de la radiación electromagnética cerca a una superficie de Schwarzschild; con base en el *punto de vista heurístico concerniente a la producción y transformación de la luz* introducido por Einstein en 1905.
2. Propiedades térmicas de la radiación electromagnética tales como: energía libre de Helmhotlz (F) y entropía (S) entre otras.
3. Se muestra que la entropía del sistema considerado es consistente con el principio holográfico.

Formulación del problema

Considere la radiación electromagnética térmica confinada entre la superficie reflectora externa de una masa estelar esférica M, de radio R, ligeramente mayor que su radio gravitacional R_0, y una segunda superficie reflectora concéntrica a la primera de radio $L \gg R$.



Condiciones del problema

1. Para la región externa a la masa esférica se asume la métrica de la forma $ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2$.

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

Condiciones del problema

1. Para la región externa a la masa esférica se asume la métrica de la forma $ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2$.
2. Una temperatura local $T(r)$ para el sistema está dadas por la ley de Tolman $T(r) = T_\infty f(r)^{-1/2}$.

Condiciones del problema

1. Para la región externa a la masa esférica se asume la métrica de la forma $ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2$.
2. Una temperatura local $T(r)$ para el sistema está dadas por la ley de Tolman $T(r) = T_\infty f(r)^{-1/2}$.
3. La gravedad modifica los modos de los campos de la forma $\nu(r) = \nu_\infty f(r)^{-1/2}$.

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

Puesto que las radiaciones de diferentes frecuencias pueden considerarse separadas unas de las otras, sin realizar ningún trabajo, las unas sobre las otras, ni transferencia de calor. La entropía de la radiación S puede representarse por la relación

$$S = \int_R^L \int_0^\infty \phi(\rho(r), \nu) d\nu \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{f(r)}}, \tag{1}$$

1. donde la función ϕ corresponde a la densidad de entropía.

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

Puesto que las radiaciones de diferentes frecuencias pueden considerarse separadas unas de las otras, sin realizar ningún trabajo, las unas sobre las otras, ni transferencia de calor. La entropía de la radiación S puede representarse por la relación

$$S = \int_R^L \int_0^\infty \phi(\rho(r), \nu) d\nu \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{f(r)}}, \tag{1}$$

1. donde la función ϕ corresponde a la densidad de entropía.
2. densidad de radiación $\rho(r)$, distribución de radiación de cuerpo negro corregida gravitacionalmente.

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

Puesto que las radiaciones de diferentes frecuencias pueden considerarse separadas unas de las otras, sin realizar ningún trabajo, las unas sobre las otras, ni transferencia de calor. La entropía de la radiación S puede representarse por la relación

$$S = \int_R^L \int_0^\infty \phi(\rho(r), \nu) d\nu \frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{f(r)}}, \tag{1}$$

1. donde la función ϕ corresponde a la densidad de entropía.
2. densidad de radiación $\rho(r)$, distribución de radiación de cuerpo negro corregida gravitacionalmente.
3. $\frac{4\pi r^2 dr}{\sqrt{f(r)}}$, el elemento diferencial de volumen corregido gravitacionalmente.

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

Para el caso del modelo tipo radiación de cuerpo negro, de $\delta S = 0$, obtiene la ley

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{1}{T(r)} = \frac{1}{T_\infty} f(r)^{1/2}. \tag{2}$$

Por otro lado veamos la función de distribución de cuerpo negro para la radiación electromagnética de acuerdo con Planck:

$$\rho(\nu, r) = \frac{8\pi h \nu^3(r)}{c^3} \left[\frac{1}{e^{\frac{h\nu(r)}{k_B T(r)}} - 1} \right]. \tag{3}$$

Con la aproximación de $\frac{h\nu_\infty}{k_B T_\infty} \gg 1$, la ecuación (3) se reduce a:

$$\rho(\nu, r) = \frac{8\pi h (\nu_\infty f(r)^{-1/2})^3}{c^3} e^{\frac{-h\nu_\infty}{k_B T_\infty}}, \tag{4}$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, h la constante de Planck y c la velocidad de la luz.

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

Despejando de (4) el término $\frac{1}{T_\infty}$, incertándolo en $\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{1}{T(r)} = \frac{1}{T_\infty} f(r)^{1/2}$ (ecuación (5)) e integrando

$$\phi = -\frac{k_B f(r)^{1/2} \rho}{h\nu_\infty} \left[ln \left| \frac{\rho c^3 f(r)^{3/2}}{8\pi h \nu_\infty^3} \right| - 1 \right]. \tag{5}$$

Tenemos que la entropía en un intervalo de frecuencia ν y $\nu + d\nu$ está dada por

$$S = V\phi\Delta\nu \tag{6}$$

y la energía por unidad de volumen y frecuencia en la forma

$$E = V\rho\Delta\nu. \tag{7}$$

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

De lo anterior se obtiene

$$S = -\frac{k_B f(r)^{1/2} E}{h\nu_\infty}\left[ln\left|\frac{Ec^3 f(r)^{3/2}}{8\pi h\nu_\infty^3 V\Delta\nu}\right| - 1\right]. \qquad (8)$$

Noción de fotón en un campo gravitacional intenso

Ahora, considere un volumen V_0, en el sentido introducido por Einstein, entonces se puede expresar una variación para la entropía

$$\Delta S = \frac{k_B f(r)^{1/2} E}{h\nu_\infty} ln \left| \frac{V}{V_0} \right| . \tag{9}$$

De acuerdo con el principio de Boltzmann

$$\Delta S = k_B ln \left| \Omega \right| , \tag{10}$$

con

$$\Omega = \left| \frac{V}{V_0} \right|^N \tag{11}$$

y de (9) expresada en la forma del principio de Boltzmann, $\Delta S = k_B ln \left|\Omega\right|$

$$\Delta S = k_B ln \left| \frac{V}{V_0} \right|^{\frac{Ef(r)^{1/2}}{h\nu_\infty}}, \tag{12}$$

se obtiene que

$$\frac{E}{N} = h\nu_\infty f(r)^{-1/2} = h\nu(r). \tag{13}$$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

Sea una métrica de la forma

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2, \tag{14}$$

luego luego la raiz del determinante del tensor métrico es

$$\sqrt{-g} = r^2 sin\theta. \tag{15}$$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

Sabemos que la energía libre de Helmholtz en el espacio euclideo es de la forma

$$\frac{F}{V} = \int_0^\infty k_B T ln \left[1 - e^{-\frac{\hbar\omega(K)}{k_B T}} \right] \frac{4\pi K^2 dK}{(2\pi)^3} = -\frac{\pi^2 k_B^4 T^4}{90\hbar^3 c^3}.$$

Sea V, el volumen de una esfera:

$$V = \int\int\int r^2 sin\theta dr d\theta d\phi$$

de lo anterior

$$T^4 V = \int T^4 \sqrt{-g} d^3 x$$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

Tendremos que la forma final para la energía libre Helmholtz en un campo gravitacional intenso es:

$$F = \int k_B T ln \left| 1 - e^{\frac{\hbar\omega(K)}{k_B T}} \right| \frac{4\pi K^2 dK}{(2\pi)^2} \int T^4 \sqrt{-g} d^3x \qquad (16)$$

donde el término $d^3x = d\theta d\phi dr$.

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

Para evaluar la primera integral que existe en (16), la cual converge al valor de $-\frac{\pi^4}{45}$, así que

$$F = -\frac{\pi^2 k_B^4}{90\hbar^3 c^3}\int T^4\sqrt{-g}d^3x. \tag{17}$$

Si $f(r)$ en la métrica antes corresponde al caso de Schwarzschild

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{2Gm}{c^2r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2Gm}{c^2r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2sin^2\theta d\phi^2, \tag{18}$$

y la temperatura está dada por la ley de Tolman

$$T(r) = \frac{T_\infty}{\sqrt{f(r)}} = \frac{T_\infty}{\sqrt{1-\frac{2Gm}{c^2r}}}, \tag{19}$$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

Por lo anterior tenemos que la energía libre de Helmholtz para la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

$$F = \frac{\pi^2 k_B^4}{90\hbar^3 c^3} \int \left[\frac{T_\infty}{\sqrt{f(r)}} \right]^4 r^2 sin\theta d^3 x. \qquad (20)$$

Cuando $f(r) = 1 - \frac{2Gm}{c^2 r}$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

Cerca del horizonte se puede reemplazar la coordenada r por la coordenada ζ, que mide la distancia propia desde el radio de Schwarzschild, $R_0 = \frac{2Gm}{c^2}$

$$r - \frac{2Gm}{c^2} = \frac{c^2\zeta^2}{8Gm}.$$

Finalmente, de (20) se obtiene

$$F = -\frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{90\hbar^3} T_\infty^4 \kappa^{-3} A \int_{\zeta=\epsilon}^{\zeta=\delta} \zeta^{-3} d\zeta = -\frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{180\hbar^3 \epsilon^2} T_\infty^4 \kappa^{-3} A. \tag{21}$$

Donde hemos aprovechado el hecho de hacer $A = \int d^2\sigma$, pues $d^3x = d\zeta d^2\sigma$ y ϵ la distancia de separación entre R_0 y R.

Finalmente de (21) se obtiene la entropía del sistema para la región cerca la superficie de Schwarzschild.

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T_\infty}\right)_V = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{45\hbar^3\epsilon^2} T_\infty^3 \kappa^{-3} A \tag{22}$$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

La energía interna corresponde a

$$dE = dF + T_\infty dS,$$

donde F viene dado por (21), por lo que E es

$$E = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{60\hbar^3 \epsilon^2} T_\infty^4 \kappa^{-3} A. \tag{23}$$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

La capacidad calorífica a volumen constante corresponde a:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T_\infty}\right)_V$$

$$C_V = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{15\hbar^3 \epsilon^2} T_\infty^3 \kappa^{-3} A \tag{24}$$

Termodinámica de la radiación electromagnética en un campo gravitacional intenso

La presión está dada en términos de un diferencial energético (F) respecto a uno volumétrico a temperatura constante; tal diferencial podemos expresarlo como $\partial V = \epsilon \partial A$. Entonces

$$P = -\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_{T_\infty},$$

$$P = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{180\hbar^3\epsilon^3} T_\infty^4 \kappa^{-3}. \tag{25}$$

Conclusiones

1. El resultado de la expresión

$$\frac{E}{N} = h\nu_\infty f(r)^{-1/2} = h\nu(r),$$

muestra que la noción de fotón introducida por Einstein, considerando la aproximación de Wien corregida por la presencia del campo gravitacional sigue siendo válida. La radiación electromagnética muestra una estructura granular cerca a la superficie de Schwarzschild.

Conclusiones

1. La expresión para la energía libre de Helmholtz

$$F = -\frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{180\hbar^3 \epsilon^2} T_\infty^4 \kappa^{-3} A,$$

es proporcional a $T_\infty^4 \kappa^{-3} A$, siendo T_∞ la temperatura medida por un observador asintóticamente lejano, κ la gravedad superficial y $A = \int d^2\sigma$. Ello es importante dada la relación existente entre la energía de Helmholtz (F) y la función de partición Z de la termodinámica estadística

$$F \propto ln\,|Z|\,.$$

Conclusiones

1. La entropía del sistema cerca de la superficie Schwarzschild

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T_\infty}\right) = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{45\hbar^3\epsilon^2} T_\infty^3 \kappa^{-3} A$$

muestra una reducción en los grados de libertad asociados a la entropía estadística, puesto que el volumen en

$$\Delta S = k_B ln \left| \frac{V}{V_0} \right|^{\frac{E f(r)^{1/2}}{h\nu_\infty}},$$

Conclusiones

por efecto de la gravedad, se reduce al área A en

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T_\infty}\right) = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{45\hbar^3 \epsilon^2} T_\infty^3 \kappa^{-3} A$$

Como conclusión, se puede afirmar que la gravedad impone una ligadura al sistema limitando el número de grados de libertad de la radiación electromagnética. Tal resultado está de acuerdo con el principio holográfico.

Conclusiones

1. La energía interna de la radiación electromagnética
$$E = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{60\hbar^3\epsilon^2} T_\infty^4 \kappa^{-3} A$$
es proporcional a $T_\infty^4 \kappa^{-3} A$. Hecho que refleja que la ley de Stephan-Boltzmann en está descripción también se cumple pues $E \propto T^4$.

Conclusiones

1. La energía interna de la radiación electromagnética

$$E = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{60\hbar^3 \epsilon^2} T_\infty^4 \kappa^{-3} A$$

es proporcional a $T_\infty^4 \kappa^{-3} A$. Hecho que refleja que la ley de Stephan-Boltzmann en está descripción también se cumple pues $E \propto T^4$.

2. Las capacidades calorifícas a volumen constante (C_V) y a presión constante (C_P) son iguales. Pues cuando $T \to 0$, se tiene que $C_P \to C_V$.

$$C_V = C_P = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{15\hbar^3 \epsilon^2} T_\infty^3 \kappa^{-3} A$$

Conclusiones

1. Para la presión ejercida por la radiación electromagnética se halló que ésta es proporcional a $T_\infty^4 \kappa^{-3} \epsilon^{-3}$ y está fuertemente ligada por el tipo de ϵ que se escoja.

$$P = \frac{\pi^2 k_B^4 c^3}{180 \hbar^3 \epsilon^3} T_\infty^4 \kappa^{-3}$$

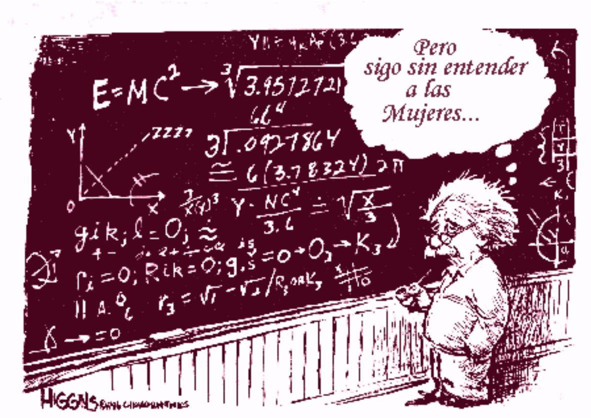


Figure: **Gracias!!!!!**