

Cuantización de grupo canónico y generadores auto-adjuntos de simetrías

A. F. Reyes Lega

Departamento de Física
Universidad de los Andes

Escuela de Física Matemática 2010
Departamento de Matemáticas, Universidad de los Andes
(Bogotá, Mayo 31 - Junio 4, 2010)

Mecánica cuántica en espacios de configuración generales

- Dirac (1931) → *Monopolos magnéticos*.
- Bopp & Haag (1950) → “Über die Möglichkeit von Spinmodellen”.
- Schulman (1968) → *Integral de camino en $SO(3)$* .
- Laidlaw & DeWitt (1971) → *Integral de camino en espacios de configuración más generales*.
- Leinaas & Myrheim (1977) → *Formulación en haces vectoriales (anyons)*.
- Souriau, Konstant, ... → *Cuantización geométrica*.

En general, para formular de manera consistente una teoría cuántica que “proviene” de un espacio de configuración clásico, es necesario considerar **haces vectoriales sobre \mathcal{Q}** .

Clases distintas de haces darán lugar a **cuantizaciones inequivalentes** del mismo sistema clásico, *i.e.*, sectores de superselección.

En cada caso, el espacio de Hilbert correspondiente estará dado por el **espacio de secciones- L^2** del haz, con respecto a una medida adecuada.

Consideremos los siguientes espacios: S^1 y $[0, 2\pi]$. Por el teorema de **Gelfand-Neumark**, sabemos:

- $[0, 2\pi] \not\cong S^1 \iff (C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \not\cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.
- $([0, 2\pi]/\sim) \cong S^1 \iff (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) & \xrightarrow{\cong} & (C(S^1), \|\cdot\|_\infty) \\
 \downarrow L^2\text{-compl.} & & \downarrow L^2\text{-compl.} \\
 (L^2([0, 2\pi]), dx) & & (L^2(S^1), d\theta)
 \end{array}$$

- Es decir: $(L^2([0, 2\pi]), dx) \cong (L^2(S^1), d\theta)$, a pesar de que $[0, 2\pi] \not\cong S^1$ (un sólo espacio de Hilbert separable!)

Observación:

Para poder distinguir los dos espacios, debemos tener en cuenta estructuras adicionales sobre el espacio de Hilbert (álgebra de observables, simetrías, CCR).

Consideremos los siguientes espacios: S^1 y $[0, 2\pi]$. Por el teorema de **Gelfand-Neumark**, sabemos:

- $[0, 2\pi] \not\cong S^1 \iff (C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \not\cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.
- $([0, 2\pi]/\sim) \cong S^1 \iff (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) & \xrightarrow{\cong} & (C(S^1), \|\cdot\|_\infty) \\
 \downarrow L^2\text{-compl.} & & \downarrow L^2\text{-compl.} \\
 (L^2([0, 2\pi]), dx) & & (L^2(S^1), d\theta)
 \end{array}$$

- Es decir: $(L^2([0, 2\pi]), dx) \cong (L^2(S^1), d\theta)$, a pesar de que $[0, 2\pi] \not\cong S^1$ (un sólo espacio de Hilbert separable!)

Observación

Para poder distinguir los dos espacios, debemos tener en cuenta estructuras adicionales sobre el espacio de Hilbert (álgebra de observables, simetrías, CCR).

Consideremos los siguientes espacios: S^1 y $[0, 2\pi]$. Por el teorema de **Gelfand-Neumark**, sabemos:

- $[0, 2\pi] \not\cong S^1 \iff (C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \not\cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.
- $([0, 2\pi]/\sim) \cong S^1 \iff (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) & \xrightarrow{\cong} & (C(S^1), \|\cdot\|_\infty) \\
 \downarrow L^2\text{-compl.} & & \downarrow L^2\text{-compl.} \\
 (L^2([0, 2\pi]), dx) & & (L^2(S^1), d\theta)
 \end{array}$$

- Es decir: $(L^2([0, 2\pi]), dx) \cong (L^2(S^1), d\theta)$, a pesar de que $[0, 2\pi] \not\cong S^1$ (un sólo espacio de Hilbert separable!)

Observación

Para poder distinguir los dos espacios, debemos tener en cuenta estructuras adicionales sobre el espacio de Hilbert (álgebra de observables, simetrías, CCR).

Consideremos los siguientes espacios: S^1 y $[0, 2\pi]$. Por el teorema de **Gelfand-Neumark**, sabemos:

- $[0, 2\pi] \not\cong S^1 \iff (C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \not\cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.
- $([0, 2\pi]/\sim) \cong S^1 \iff (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) & \xleftarrow{\cong} & (C(S^1), \|\cdot\|_\infty) \\
 \downarrow L^2\text{-compl.} & & \downarrow L^2\text{-compl.} \\
 (L^2([0, 2\pi]), dx) & & (L^2(S^1), d\theta)
 \end{array}$$

- Es decir: $(L^2([0, 2\pi]), dx) \cong (L^2(S^1), d\theta)$, a pesar de que $[0, 2\pi] \not\cong S^1$ (un sólo espacio de Hilbert separable!)

Observación

Para poder distinguir los dos espacios, debemos tener en cuenta estructuras adicionales sobre el espacio de Hilbert (álgebra de observables, simetrías, GCR).

Consideremos los siguientes espacios: S^1 y $[0, 2\pi]$. Por el teorema de **Gelfand-Neumark**, sabemos:

- $[0, 2\pi] \not\cong S^1 \iff (C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \not\cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.
- $([0, 2\pi]/\sim) \cong S^1 \iff (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) & \xleftarrow{\cong} & (C(S^1), \|\cdot\|_\infty) \\
 \downarrow L^2\text{-compl.} & & \downarrow L^2\text{-compl.} \\
 (L^2([0, 2\pi]), dx) & & (L^2(S^1), d\theta)
 \end{array}$$

- Es decir: $(L^2([0, 2\pi]), dx) \cong (L^2(S^1), d\theta)$, a pesar de que $[0, 2\pi] \not\cong S^1$ (un sólo espacio de Hilbert separable!)

Observación:

Para poder distinguir los dos espacios, debemos tener en cuenta estructuras adicionales sobre el espacio de Hilbert (álgebra de observables, simetrías, CCR).

Consideremos los siguientes espacios: S^1 y $[0, 2\pi]$. Por el teorema de **Gelfand-Neumark**, sabemos:

- $[0, 2\pi] \not\cong S^1 \iff (C([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \not\cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.
- $([0, 2\pi]/\sim) \cong S^1 \iff (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) \cong (C(S^1), \|\cdot\|_\infty)$.

$$\begin{array}{ccc}
 (C_p([0, 2\pi]), \|\cdot\|_\infty) & \xleftarrow{\cong} & (C(S^1), \|\cdot\|_\infty) \\
 \downarrow L^2\text{-compl.} & & \downarrow L^2\text{-compl.} \\
 (L^2([0, 2\pi]), dx) & & (L^2(S^1), d\theta)
 \end{array}$$

- Es decir: $(L^2([0, 2\pi]), dx) \cong (L^2(S^1), d\theta)$, a pesar de que $[0, 2\pi] \not\cong S^1$ (un sólo espacio de Hilbert separable!)

Observación:

Para poder distinguir los dos espacios, debemos tener en cuenta estructuras adicionales sobre el espacio de Hilbert (álgebra de observables, simetrías, CCR).

Un ejemplo, de interés físico:

Ejemplo (Partículas idénticas en $D = 2$)

$$\mathbb{R}P^1 := S^1 / \mathbb{Z}_2 \cong S^1.$$

Desde un punto de vista puramente matemático, no hay diferencia entre estos dos espacios, pero sí la hay desde un punto de vista físico!

B. Kuckert: Angular momentum intertwiners.

Phys. Lett. A 322, pp. 47-53 (2004).

Teorema (En dos dimensiones espaciales)

La conexión entre spin y estadística es válida si y sólo si existe un operador unitario U (intertwiner) tal que:

$$j_z = 2UJ_zU^\dagger$$

Observaciones:

- Spin-estadística: $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\pi j_z} \stackrel{!}{=} e^{2\pi i s}$.
- U va del espacio de 1 partícula al de 2 partículas.
- Caracterización de spin-estadística inspirada por AQFT.

B. Kuckert: Angular momentum intertwiners.

Phys. Lett. A 322, pp. 47-53 (2004).

Teorema (En tres dimensiones espaciales)

La conexión entre spin y estadística es válida si y sólo si existe un operador unitario U (intertwiner) tal que:

$$j_z |_{\mathcal{H}_+} = 2UJ_zU^\dagger |_{\mathcal{H}_+}$$

Observación:

- \mathcal{H}_+ : estados de máximo momento angular y z -paridad positiva...

El trabajo de Kuckert es interesante porque:

- Caracteriza spin-estadística, en mecánica cuántica no-relativista, en términos de una equivalencia unitaria entre operadores de momento angular de sectores de diferente número de partículas..QFT?
- El argumento en 3D usa operaciones de paridad (CPT?)
- Podría llevar a un mejor entendimiento de la conexión entre spin y estadística en mecánica cuántica no-relativista.
- Relación con teoría cuántica de campos? Causalidad?

El trabajo de Kuckert es interesante porque:

- Caracteriza spin-estadística, en mecánica cuántica no-relativista, en términos de una equivalencia unitaria entre operadores de momento angular de sectores de diferente número de partículas..QFT?
- El argumento en 3D usa operaciones de paridad (CPT?)
- Podría llevar a un mejor entendimiento de la conexión entre spin y estadística en mecánica cuántica no-relativista.
- Relación con teoría cuántica de campos? Causalidad?

El trabajo de Kuckert es interesante porque:

- Caracteriza spin-estadística, en mecánica cuántica no-relativista, en términos de una equivalencia unitaria entre operadores de momento angular de sectores de diferente número de partículas..QFT?.
- El argumento en 3D usa operaciones de paridad (CPT?).
- Podría llevar a un mejor entendimiento de la conexión entre spin y estadística en mecánica cuántica no-relativista.
- Relación con teoría cuántica de campos? Causalidad?

El trabajo de Kuckert es interesante porque:

- Caracteriza spin-estadística, en mecánica cuántica no-relativista, en términos de una equivalencia unitaria entre operadores de momento angular de sectores de diferente número de partículas..QFT?.
- El argumento en 3D usa operaciones de paridad (CPT?).
- Podría llevar a un mejor entendimiento de la conexión entre spin y estadística en mecánica cuántica no-relativista.

● Relación con teoría cuántica de campos? Causalidad?

El trabajo de Kuckert es interesante porque:

- Caracteriza spin-estadística, en mecánica cuántica no-relativista, en términos de una equivalencia unitaria entre operadores de momento angular de sectores de diferente número de partículas..QFT?.
- El argumento en 3D usa operaciones de paridad (CPT?).
- Podría llevar a un mejor entendimiento de la conexión entre spin y estadística en mecánica cuántica no-relativista.
- Relación con teoría cuántica de campos? Causalidad?

Pero también tiene un problema:

Basado en $\mathcal{Q} = (\mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \setminus \Delta) / S_n$, pero cálculos realizados en coordenadas locales.

- 1 Sigue siendo válido el resultado en una formulación global?
- 2 Hay (en $D = 3$) alguna obstrucción para la existencia de los operadores U ?

En $D = 2$, la primera pregunta es fácil de responder, debido a que:

- $S^1 / \mathbb{Z}_2 \cong S^1$.
- Todo haz complejo sobre S^1 es trivial.

- $C(S^1)$: álgebra C^* con generador u y norma fijada por $\|1 + e^{i\alpha}u\| = 2$.
- $C(S^1) = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-$, con \mathcal{A}_+ generada por u^2 .
- Como $\|1 + e^{i\alpha}u^2\| = 2$, haciendo $e_n := u^n$, obtenemos un isomorfismo: $\psi : \mathcal{A}_+ \rightarrow C(S^1) : e_{2n} \mapsto e_n$.
- Definir:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A}_+ &\longrightarrow \mathbb{C} \\ a &\longmapsto \varphi(a) := \int_{S^1} a(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{A}_+, \|\cdot\|_{\infty}^{S^1}) & \xrightarrow{\cong} & (C(S^1), \|\cdot\|_{\infty}^{S^1}) \\ \text{GNS} \downarrow \pi_{\varphi} & & \downarrow \pi \\ \mathcal{B}((L^2(M(\mathcal{A}_+)), d\mu_{\varphi})) & & \mathcal{B}((L^2(S^1), d\theta)) \end{array}$$

- La medida μ_φ obtenida de esta forma es la requerida para construir el operador U .
- Versión global en 3D? \rightarrow necesitamos los operadores diferenciales correspondientes a generadores de rotaciones.
- Haces $SU(2)$ -equivariantes: muy naturales desde el punto de vista de cuantización.

Isham (grupo canónico)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\jmath} & \text{HamVF}(M) \longrightarrow 0. \\
 & & & & & & \uparrow \gamma \\
 & & & & & & \mathcal{L}(\mathcal{G}) \\
 & & & & \swarrow P & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

- M : variedad simpléctica ($M = T^*Q$; $Q = G/H$).
- $f \in C^\infty(M)$, ξ_f campo vectorial f/tal. Entonces $\jmath(f) := -\xi_f$.
- \mathcal{G} : grupo de Lie actuando simplécticamente sobre M .
- $P : \mathcal{L}(\mathcal{G}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ debe ser homomorfismo de álgebras de Lie (obstrucciones a la existencia de P a nivel cohomológico!)

Isham (grupo canónico)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\jmath} & \text{HamVF}(M) \longrightarrow 0. \\
 & & & & & & \uparrow \gamma \\
 & & & & & & \mathcal{L}(\mathcal{G}) \\
 & & & & \swarrow P & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

- M : variedad simpléctica ($M = T^*Q$; $Q = G/H$).
- $f \in C^\infty(M)$, ξ_f campo vectorial f/tal. Entonces $\jmath(f) := -\xi_f$.
- \mathcal{G} : grupo de Lie actuando simplécticamente sobre M .
- $P : \mathcal{L}(\mathcal{G}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ debe ser homomorfismo de álgebras de Lie (obstrucciones a la existencia de P a nivel cohomológico!)

Isham (grupo canónico)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\jmath} & \text{HamVF}(M) \longrightarrow 0. \\
 & & & & & & \uparrow \gamma \\
 & & & & & & \mathcal{L}(\mathcal{G}) \\
 & & & & \swarrow P & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

- M : variedad simpléctica ($M = T^*Q$; $Q = G/H$).
- $f \in C^\infty(M)$, ξ_f campo vectorial f/tal. Entonces $\jmath(f) := -\xi_f$.
- \mathcal{G} : grupo de Lie actuando simplécticamente sobre M .
- $P : \mathcal{L}(\mathcal{G}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ debe ser homomorfismo de álgebras de Lie (obstrucciones a la existencia de P a nivel cohomológico!)

Isham (grupo canónico)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\jmath} & \text{HamVF}(M) \longrightarrow 0. \\
 & & & & & & \uparrow \gamma \\
 & & & & & & \mathcal{L}(\mathcal{G}) \\
 & & & & \swarrow P & & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

- M : variedad simpléctica ($M = T^*Q$; $Q = G/H$).
- $f \in C^\infty(M)$, ξ_f campo vectorial f/tal. Entonces $\jmath(f) := -\xi_f$.
- \mathcal{G} : grupo de Lie actuando simplécticamente sobre M .
- $P : \mathcal{L}(\mathcal{G}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ debe ser homomorfismo de álgebras de Lie (obstrucciones a la existencia de P a nivel cohomológico!)

- Buscar un subgrupo adecuado de $C^\infty(Q, \mathbb{R})/\mathbb{R} \rtimes \text{Diff } Q$.
- Observables: representaciones (a través de operadores autoadjuntos) de los generadores infinitesimales correspondientes.
- Para el caso $Q = G/H$, tenemos: $W \rtimes G$.
- En este caso, P está dado por $(\tilde{A} \equiv (\varphi, A))$:

$$\begin{aligned}
 P : \mathcal{L}(W^* \rtimes G) &\longrightarrow C^\infty(T^*W, \mathbb{R}) \\
 \tilde{A} &\longmapsto P(\tilde{A}) : (u, \psi) \mapsto \psi(R(A)u) + \varphi(u).
 \end{aligned}$$

El espacio de representación será un espacio de secciones de un haz vectorial E sobre $Q = G/H$, asociado al haz principal $G \rightarrow G/H$, vía una irrep. H . Para esto, necesitamos un **levantamiento** de la acción:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{l_g^\uparrow} & E \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 Q & \xrightarrow{l_g} & Q.
 \end{array}$$

Representación ($g \in G$):

$$(U(g)\Psi)(x) := \sqrt{\frac{d\mu_g}{d\mu}}(x) l_g^\uparrow \Psi(g^{-1} \cdot x).$$

Ejemplo

Monopolo Magnético

$$\mathcal{Q} = \mathcal{S}^2 = SU(2)/U(1)$$

En este caso, los operadores obtenidos son, localmente, de la forma

$$J = L - \frac{n}{2}K,$$

con n un entero. La expresión clásica para una partícula cargada en presencia del campo de un monopolo es

$$\vec{J} = \vec{L} - \frac{eg}{c}\vec{K}.$$

- Usualmente, el número n aparece por requerimientos de compatibilidad en la función de onda (winding number, Chern number, etc..)
- Aquí, proviene directamente de las irreps. de $U(1)$.

Ejemplo

Espacio Proyectivo

$$\mathcal{Q} = \mathbb{R}^2 = SU(2)/H$$

Las 2 irreps. de

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \bar{\lambda} \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix} \mid |\lambda|^2 = 1 \right\},$$

dan lugar a estadísticas fermiónicas/bosónicas

$(C(S^2) = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_-)$:

- Caso bosónico: \mathcal{A}_+ , con $J_i \equiv L_i$.
- Caso fermiónico: \mathcal{A}_- , con $J_i \equiv L_i$.

Berry-Robbins (1997,2000).

Proc. R. Soc. London A, 453, pp. 1771-1790, 1997.

J.Phys. A, 33, pp. L207-L214, 2000.

Reemplazar estados usuales, por unos que dependen de r ,
 $|s; m\rangle \rightsquigarrow |s; m(\vec{r})\rangle$, de tal forma que:

- $\vec{r} \mapsto |m_1, m_2(\vec{r})\rangle$: bien definido y suave.
- “Exchange”: $|m_2, m_1(-\vec{r})\rangle = (-1)^K |m_1, m_2(\vec{r})\rangle$.
- Transporte paralelo: $\langle m'_1, m'_2(\vec{r}) | \nabla m_1, m_2(\vec{r}) \rangle = 0$.

Función de onda dada por $|\Psi(\vec{r})\rangle = \sum_{m_1, m_2} \Psi_{m_1, m_2} |m_1, m_2(\vec{r})\rangle$.

Finalmente, *imponer* la condición

$$|\Psi(-\vec{r})\rangle \stackrel{!}{=} |\Psi(\vec{r})\rangle$$

Comentarios:

- Conjetura original: $K = 2S$.
- Más de dos partículas: problema difícil (Atiyah-Bielawski 2002, Harrison-Robbins 2004).
- Propuesta que ha generado gran controversia.
- Usando módulos proyectivos se obtiene la misma base, de una forma natural (ver abajo).

Haces vectoriales y módulos proyectivos

- ▶ Sea M una variedad. Tomar $\mathcal{A} = C(M)$. En este contexto, un **módulo proyectivo** sobre \mathcal{A} es la imagen de una matriz \mathcal{A} -valuada p tal que $p^2 = p$.
- ▶ Sea $\xi \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial sobre M . Entonces, $\Gamma(\xi)$ es un módulo proyectivo sobre \mathcal{A} .
- ▶ Converso también es válido: dado un módulo proyectivo \mathcal{E} sobre \mathcal{A} , existe un haz vectorial ξ t.q. $\Gamma(\xi) \cong \mathcal{E}$ (Serre-Swan).

Haces vectoriales y módulos proyectivos

- ▶ Sea M una variedad. Tomar $\mathcal{A} = C(M)$. En este contexto, un **módulo proyectivo** sobre \mathcal{A} es la imagen de una matriz \mathcal{A} -valuada p tal que $p^2 = p$.
- ▶ Sea $\xi \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial sobre M . Entonces, $\Gamma(\xi)$ es un módulo proyectivo sobre \mathcal{A} .
- ▶ Converso también es válido: dado un módulo proyectivo \mathcal{E} sobre \mathcal{A} , existe un haz vectorial ξ t.q. $\Gamma(\xi) \cong \mathcal{E}$ (Serre-Swan).

Haces vectoriales y módulos proyectivos

- ▶ Sea M una variedad. Tomar $\mathcal{A} = C(M)$. En este contexto, un **módulo proyectivo** sobre \mathcal{A} es la imagen de una matriz \mathcal{A} -valuada p tal que $p^2 = p$.
- ▶ Sea $\xi \xrightarrow{\pi} M$ un haz vectorial sobre M . Entonces, $\Gamma(\xi)$ es un módulo proyectivo sobre \mathcal{A} .
- ▶ Converso también es válido: dado un módulo proyectivo \mathcal{E} sobre \mathcal{A} , existe un haz vectorial ξ t.q. $\Gamma(\xi) \cong \mathcal{E}$ (Serre-Swan).

2 Partículas $\rightarrow \mathcal{A} := C(S^2)$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_- \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j.$$

$$\mathcal{A}^3 \cong \mathcal{A} \otimes V^1, J_i := L_i \otimes 1_3 + \text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \tau_i.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes V^1 &\cong \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j \right) \otimes V^1 \\ &\cong V^1 \oplus (V^0 \oplus V^1 \oplus V^2) \oplus (V^1 \oplus V^2 \oplus V^3) \oplus \dots \end{aligned}$$

Obtenemos, para el elemento escalar, la siguiente expresión:

$$\sqrt{4\pi/3} (Y_{1,1} \otimes |1, -1\rangle - Y_{1,0} \otimes |0, 0\rangle + Y_{1,-1} \otimes |1, 1\rangle).$$

2 Partículas $\rightarrow \mathcal{A} := C(S^2)$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_- \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j.$$

$$\mathcal{A}^3 \cong \mathcal{A} \otimes V^1, J_i := L_i \otimes 1_3 + \text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \tau_i.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes V^1 &\cong \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j \right) \otimes V^1 \\ &\cong V^1 \oplus (V^0 \oplus V^1 \oplus V^2) \oplus (V^1 \oplus V^2 \oplus V^3) \oplus \dots \end{aligned}$$

Obtenemos, para el elemento escalar, la siguiente expresión:

$$\sqrt{4\pi/3} (Y_{1,1} \otimes |1, -1\rangle - Y_{1,0} \otimes |0, 0\rangle + Y_{1,-1} \otimes |1, 1\rangle).$$

2 Partículas $\rightarrow \mathcal{A} := C(S^2)$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_- \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j.$$

$$\mathcal{A}^3 \cong \mathcal{A} \otimes V^1, J_i := L_i \otimes 1_3 + \text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \tau_i.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes V^1 &\cong \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j \right) \otimes V^1 \\ &\cong V^1 \oplus (V^0 \oplus V^1 \oplus V^2) \oplus (V^1 \oplus V^2 \oplus V^3) \oplus \dots \end{aligned}$$

Obtenemos, para el elemento escalar, la siguiente expresión:

$$\sqrt{4\pi/3} (Y_{1,1} \otimes |1, -1\rangle - Y_{1,0} \otimes |0, 0\rangle + Y_{1,-1} \otimes |1, 1\rangle).$$

2 Partículas $\rightarrow \mathcal{A} := C(S^2)$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_- \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j.$$

$$\mathcal{A}^3 \cong \mathcal{A} \otimes V^1, J_i := L_i \otimes 1_3 + \text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \tau_i.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes V^1 &\cong \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j \right) \otimes V^1 \\ &\cong V^1 \oplus (V^0 \oplus V^1 \oplus V^2) \oplus (V^1 \oplus V^2 \oplus V^3) \oplus \dots \end{aligned}$$

Obtenemos, para el elemento escalar, la siguiente expresión:

$$\sqrt{4\pi/3} (Y_{1,1} \otimes |1, -1\rangle - Y_{1,0} \otimes |0, 0\rangle + Y_{1,-1} \otimes |1, 1\rangle).$$

2 Partículas $\rightarrow \mathcal{A} := C(S^2)$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ \oplus \mathcal{A}_- \cong \bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j.$$

$$\mathcal{A}^3 \cong \mathcal{A} \otimes V^1, J_i := L_i \otimes 1_3 + \text{id}_{\mathcal{A}} \otimes \tau_i.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \otimes V^1 &\cong \left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}_0} V^j \right) \otimes V^1 \\ &\cong V^1 \oplus (V^0 \oplus V^1 \oplus V^2) \oplus (V^1 \oplus V^2 \oplus V^3) \oplus \dots \end{aligned}$$

Obtenemos, para el elemento escalar, la siguiente expresión:

$$\sqrt{4\pi/3} (Y_{1,1} \otimes |1, -1\rangle - Y_{1,0} \otimes |0, 0\rangle + Y_{1,-1} \otimes |1, 1\rangle).$$

Identificando \mathcal{A}^3 con $\mathcal{A} \otimes V^1$:

$$|\psi\rangle := \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} Y_{1,-1} \\ -Y_{1,0} \\ Y_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ -\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \sin \theta \end{pmatrix}.$$

Definir proyector en \mathcal{A}^3 a través de $p := |\psi\rangle\langle\psi|$.

En forma matricial,

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{4\pi}{45}} Y_{2,0} & -\sqrt{\frac{4\pi}{15}} Y_{2,-1} & -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{2,-2} \\ \sqrt{\frac{4\pi}{15}} Y_{2,1} & \frac{1}{3} + \sqrt{\frac{16\pi}{45}} Y_{2,0} & \sqrt{\frac{4\pi}{15}} Y_{2,-1} \\ -\sqrt{\frac{8\pi}{15}} Y_{2,2} & -\sqrt{\frac{4\pi}{15}} Y_{2,1} & \frac{1}{3} - \sqrt{\frac{4\pi}{45}} Y_{2,0} \end{pmatrix}.$$

Obtenemos el siguiente isomorfismo de \mathcal{A}_+ -módulos:

$$p(\mathcal{A}_+^3) \cong \mathcal{A}_-.$$

Caso general

Acción $G \times M \rightarrow M$ (sin puntos fijos).

- Escoger una irrep R de G . Para $f \in C(M)$, definir $E_i^R(f)$ a través de

$$E_i^R f(m) := \frac{n_R}{|G|} \sum_{g \in G} R_{ii}(g^{-1}) f(g^{-1} \cdot m).$$

- Entonces,

(i) $C(M) = \bigoplus_{R,i} E_i^R(C(M)).$

(ii) $E_i^R(C(M))$ es un $C(M/G)$ -módulo proyectivo.

Caso general

Acción $G \times M \rightarrow M$ (sin puntos fijos).

- Escoger una irrep R de G . Para $f \in C(M)$, definir $E_i^R(f)$ a través de

$$E_i^R f(m) := \frac{n_R}{|G|} \sum_{g \in G} R_{ii}(g^{-1}) f(g^{-1} \cdot m).$$

- Entonces,

(i) $C(M) = \bigoplus_{R,i} E_i^R(C(M)).$

(ii) $E_i^R(C(M))$ es un $C(M/G)$ -módulo proyectivo.

Caso general

Acción $G \times M \rightarrow M$ (sin puntos fijos).

- Escoger una irrep R de G . Para $f \in C(M)$, definir $E_i^R(f)$ a través de

$$E_i^R f(m) := \frac{n_R}{|G|} \sum_{g \in G} R_{ii}(g^{-1}) f(g^{-1} \cdot m).$$

- Entonces,

(i) $C(M) = \bigoplus_{R,i} E_i^R(C(M)).$

(ii) $E_i^R(C(M))$ es un $C(M/G)$ -módulo proyectivo.

Caso general

Acción $G \times M \rightarrow M$ (sin puntos fijos).

- Escoger una irrep R de G . Para $f \in C(M)$, definir $E_i^R(f)$ a través de

$$E_i^R f(m) := \frac{n_R}{|G|} \sum_{g \in G} R_{ii}(g^{-1}) f(g^{-1} \cdot m).$$

- Entonces,

(i) $C(M) = \bigoplus_{R,i} E_i^R(C(M)).$

(ii) $E_i^R(C(M))$ es un $C(M/G)$ -módulo proyectivo.

Caso general

Acción $G \times M \rightarrow M$ (sin puntos fijos).

- Escoger una irrep R de G . Para $f \in C(M)$, definir $E_i^R(f)$ a través de

$$E_i^R f(m) := \frac{n_R}{|G|} \sum_{g \in G} R_{ii}(g^{-1}) f(g^{-1} \cdot m).$$

- Entonces,

(i) $C(M) = \bigoplus_{R,i} E_i^R(C(M)).$

(ii) $E_i^R(C(M))$ es un $C(M/G)$ -módulo proyectivo.

Secciones como funciones equivariantes

Consideremos $(\xi, \pi, M/G)$ (haz vectorial sobre M/G) y $q : M \rightarrow M/G$. Usando el resultado anterior y el hecho de que

$$C(M) \otimes_{C(M/G)} \Gamma(\xi) \cong \Gamma(q^* \xi),$$

se puede mostrar:

$$\Gamma(\xi) \cong \Gamma^G(q^* \xi) := \{s \in \Gamma(q^* \xi) \mid g \cdot s = s \text{ para todo } g \text{ in } G\}$$

Comentarios

- Formalismo originalmente desarrollado (AR, 2006) para dar una interpretación geométrica de la construcción de Berry-Robbins.
- Aplicaciones de los métodos de cálculo a transiciones de fase cuánticas (con H. Contreras)
- Implementabilidad de la propuesta de Kuckert en 3 dimensiones? Interacción interesante entre topología, análisis y física (en desarrollo)
- Primer paso en esta dirección: Operadores de rotación para partículas de spin cero.

Referencias

-  N. Papadopoulos, M. Paschke, Reyes. A.F., F. Scheck. *Annales Mathématiques Blaise-Pascal* **11**(2), 205 (2004).
-  C. Benavides, A. Reyes-Lega, en *Geometric and Topological Methods in Quantum Field Theory*, ed. by H. Ocampo, E. Pariguán, S. Paycha. pp. 344-367 (CUP, 2010). arXiv:0806.2449v1
-  N. Papadopoulos, A.F. Reyes-Lega, *Foundations of Physics* (in press). arXiv:0910.1659v1
-  A. Reyes-Lega, C. Benavides, *Foundations of Physics* (in press). arXiv:0910.1659v1