APLICACIONES DE LAS BASES DE RIESZ EN LA MECÁNICA CUÁNTICA

II ESCUELA DE FÍSICO MATEMÁTICA

Universidad de los Andes

Arnaldo de la Barrera Correa

Universidad de Pamplona

Junio, 2010

RESUMEN.

Se introducen algunos tópicos de la teoría de espacios de Hilbert tales como:

operadores: adjuntos, auto-adjuntos y Hermitianos y las nociones de sistemas biortonormales y bases de Riesz ,

los cuales juegan un papel importante en la mecánica cuántica.

Utilizando las ideas anteriores se presentan las nociones de operadores **métricos y pseudo-métricos**, los cuales permiten extender la mecánica cuántica $(H, \langle ., . \rangle)$(espacio de Hilbert con producto interior dp)

a la **mecánica cuántica pseudo- Hermitiana** $(K, \prec ., . \succ)$ (**espacios con métrica indefinida**)

INTRODUCCIÓN.

El análisis funcional y sus métodos juegan un papel importante en el estudio de la mecánica cuántica, en especial la teoría de **espacios de Hilbert** y operadores lineales sobre estos.

El interés en los operadores en **mecánica cuántica** se debe a que en la formulación de Dirac- Von Neumann , los posibles valores de los **observables físicos** o magnitudes físicas, son precisamente los autovalores de ciertos operadores que representan la magnitud física y las respectivas autofunciones representan los estados atómicos estacionarios dentro del marco mecánico ondulatorio.

De esta manera el que un operador pueda ser interpretado como una magnitud físicamente medible requiere que sus **autovalores sean numeros reales**.

Son de gran interés los **operadores hermiticos, adjuntos y auto-adjuntos** definidos sobre un espacio de Hilbert H.

Un operador hermitico es un operador lineal que, sobre un cierto dominio, coincide con su propio **adjunto**.

Una propiedad importante de estos operadores es que sus **autovalores son siempre numeros reales**.

Cuando el **dominio** de un operador **hermitico** y el de su operador **adjunto** coinciden totalmente se dice entonces que es un **operador auto-adjunto**.

Todos los operadores importantes de la mecánica cuántica como la **posición, el momentum, el momento angular, la energía o el spin** se representan como operadores **auto-adjuntos** en un **dominio denso** del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Otros tópicos de gran importancia, los cuales se encuentran estrechamente relacionados con las nociones anteriores son las **bases de Riesz y los sistemas biortonormales** .

Una **base de Riesz** es una base **equivalente** a una **base ortonormal**.

Trabajos recientes tales como Strandell[ ] entorno a **procesos estocásticos estacionarios** y Mostafazadeh[1] en la formulación de la **mecánica cuántica pseudo- Hermitiana** muestran su importancia.

PRODUCTO INTERIOR .

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una aplicación $\langle .,. \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que es un **producto interior** en E si para todo $x, y, z \in E$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumple:

(1) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$;

(2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(3) $\langle x, x \rangle \geq 0$, y $\langle x, x \rangle = 0$ solo si $x = 0$

El par $(E, \langle .,. \rangle)$ recibe el nombre de espacio con producto interior, la condición (3) indica que el producto interior es **semi-definido positivo**, si se suprime la condición (3), $\langle .,. \rangle$ es una **forma bilineal** o hermitica.

Dados dos vectores $x, y \in E$, se dice que son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$

Se cumple la propiedad Pitagórica

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

donde $\|.\|$ es la norma inducida por el producto interior.

ESPACIOS DE HILBERT Y SISTEMAS ORTONORMALES .

Un espacio de Hilbert H es un espacio vectorial con producto interno que es **completo** con respecto a la norma inducida por el producto interno.

Ejemplo.

(1) $L^2(X, \Im, \mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \int_X |f|^2 d\mu < \infty\}$, f medible, μ medida positiva, con el producto interior

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\overline{g}d\mu$$

(2) $l^2(\mathbb{Z}) = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty\}$ con el producto interior

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n\overline{y}_n$$

l^2 juega un papel importante en la **version matricial(matrices infinitas) de la mecánica cuántica**.

L^2 juega un papel importante en la **version ondulatoria(operadores) de la mecánica cuántica**.

SISTEMAS ORTONORMALES COMPLETOS .

Se dice que $\{f_n\} \subset H$ es un sistema **ortonormal completo** en H si $\{f_n\}$ no esta contenido en un sistema ortonormal mas grande para H, es decir, si existe un vector diferente de cero en H el cual es ortogonal a cualquier f_n

Teorema. *Sea H espacio de Hilbert, se tiene que:*

(1) *Si H es separable, entonces todo sistema ortonormal de vectores en H consiste de un numero finito o contable de elementos;*

(2) *Una sucesión ortonormal infinita $e_1, e_2, e_3, ...$ es completa en H si y solo si es cerrada en H;*

(3) *El espacio H contiene una sucesión ortonormal completa si y solo si este es separable;*

(4) *Cualquier dos sistemas ortonormales completos para un espacio de Hilbert H tienen el mismo numero cardinal.*

ALGUNAS PROPIEDADES IMPORTANTES .

Sea H espacio de Hilbert de dimension infinita separable, $\{e_n\}$ **base de Schauder** *ortonormal* para H, se tiene

$$\langle e_m, e_n \rangle = \delta_{mn}$$

.

Si $\{e_1, e_2, e_3, ...\}$ es una **base ortonormal** para un espacio de Hilbert H, entonces cualquier elemento f se tiene la **expansion de Fourier**

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

(Teorema de Riesz- Fischer) Sea $\{e_n\}$ una **sucesión ortonormal completa** en un espacio de Hilbert de dimension infinita y **separable**, entonces el operador $\Phi_{e_n} : H \longrightarrow l^2$ tal que

$$\Phi_{e_n}(f) = \{\langle f, e_n \rangle\}$$

para algún $f \in H$ y $c_n = \langle f, e_n \rangle \in l^2$ es un **isomorfismo isométrico**.

OPERADORES CON DOMINIO DENSO .

Sea $(E, \langle ., . \rangle)$ espacio con producto interior, $D \subseteq E$ una variedad lineal y $T : D \longrightarrow E$ un operador lineal, D recibe el nombre de **dominio** del operador y se nota $D(T)$.

Si $\overline{D(T)} = E$, se dice que el operador tiene **dominio denso** en E.

Ejemplo. El operador $D = \frac{d}{dx}$ es **densamente definido** en $L^2(\mathbb{R})$ porque el subespacio de funciones diferenciables es **denso** en $L^2(\mathbb{R})$.

T es **acotado** si

$$\sup_{f \in D, \|f\| \leq 1} \|Tf\| < \infty$$

FUNCIONALES BILINEALES.

Sea H espacio de Hilbert y

$$B : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

se dice que B es un **funcional bilineal** sobre H, si para cada $f, g \in H$ se tiene

(1) $B(a_1 f_1 + a_2 f_2, g) = a_1 B(f_1, g) + a_2 B(f_2, g)$

(2) $B(f, b_1 g_1 + b_2 g_2) = \overline{b_1} B(f, g_1) + \overline{b_2} B(f, g_2)$

(3) $sup\{|B(f,g)| : \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1\} < \infty$.

con $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2$.

UN EJEMPLO DE FUNCIONAL BILINEAL Y NORMA DE UN FUNCIONAL .

Un ejemplo de un funcional bilineal es el **producto interior** $\langle ., . \rangle$.

El numero

$$sup\{|B(f,g)| : \|f\| \leq 1, \|g\| \leq 1\}$$

recibe el nombre de norma del funcional bilineal B, y se nota $\|B\|$. Se puede probar que

$$\|B\| = sup\{|B(f,g)| : \|f\| = 1, \|g\| = 1\} = sup\frac{|B(f,g)|}{\|f\|\|g\|}.$$

Por lo tanto, para cualquier $f, g \in H$,

$$|B(f,g)| \leq \|B\|\|f\|\|g\|.$$

UN TEOREMA DE REPRESENTACIÓN.

Teorema. *Cada funcional bilineal* $B(f, g)$ *tiene una representación de la forma*

$$B(f, g) = \langle Af, g\rangle.$$

En esta ecuación A *es un operador lineal acotado con dominio* H *el cual es determinado de manera única por* B. *Además,*

$$\|A\| = \|B\|.$$

OPERADORES ADJUNTOS Y AUTO-ADJUNTOS.

Sea $A \in L(H)$ operador lineal acotado. La expresión

$$\langle f, Ag \rangle$$

define un funcional bilineal sobre H con norma $\|A\|$.

De acuerdo al teorema anterior, existe un único operador acotado $A^* \in L(H)$ con norma $\|A^*\| = \|A\|$ tal que

$$\langle f, Ag \rangle = \langle A^* f, g \rangle$$

para cada $f, g \in H$. Este operador se llama **adjunto** de A.

Es fácil probar que $(A^*)^* = A$. y $(AB)^* = B^* A^*$

Si A es acotado y $A^* = A$, se dice que A es **auto-adjunto**.

Se dice que A es **normal** si

$$A^*A = AA^*.$$

OPERADORES SIMÉTRICOS(HERMITIANOS) .

Sea $A : D(A) \to H$ operador lineal, $D(A)$ dominio de A. A es **simétrico** si:

(1) $D(A)$ es denso en H;

(2) para todo $f, g \in D(A)$,

$$\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$$

.

Es claro que $\langle Af, f \rangle \in \mathbb{R}$.

Si $\langle Af, f \rangle \geq 0$ para todo $f \in D(A)$, se dice que A es **definido positivo**.

Si el operador **simétrico** A es acotado, entonces se puede extender por continuidad a casi todo H, en este caso

$$A = A^*.$$

Si A es **simétrico**, en general se tiene $A \subseteq A^*$

ALGUNOS RESULTADOS IMPORTANTES CON RESPECTO A OPERADORES SIMÉTRICOS .

Teorema. *Un operador* ***simétrico*** *A tal que su rango es todo H es* ***auto-adjunto****.*

Teorema. *Los* ***autovalores*** *de un operador simétrico son* ***reales****.*

Demostración. Si

$$Af = \lambda f$$

con $f \neq 0$, entonces $\lambda\langle f, f\rangle = \langle \lambda f, f\rangle = \langle Af, f\rangle = \langle f, Af\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \overline{\lambda}\langle f, f\rangle$ por tanto $\lambda = \overline{\lambda}$

$\square$

Teorema. ***Autovectores*** *f_1 y f_2 pertenecientes a dos* ***autovalores*** *λ_1 y λ_2 de un operador simétrico son* ***ortogonales****.*

Demostración. Sean $Af_1 = \lambda_1 f_1$, $Af_2 = \lambda_1 f_2$, donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $\lambda_1\langle f_1, f_2\rangle = \langle \lambda_1 f_1, f_2\rangle = \langle Af_1, f_2\rangle = \langle f_1, Af_2\rangle = \langle f_1, \lambda_2 f_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle f_1, f_2\rangle$ por tanto

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle f_1, f_2\rangle = 0$$

de donde $\langle f_1, f_2\rangle = 0$.

$\square$

UN EJEMPLO DE UN OPERADOR SIMÉTRICO.

Consideremos el operador diferencial P en $L^2(a,b)$ el cual viene definido por

$$P\varphi = i\frac{d\varphi}{dt}$$

para todo $\varphi(t) \in D(P)$ y cumple:

(1) Si $\varphi \in D(P)$ entonces $\varphi(t)$ es absolutamente continua sobre cada subintervalo de $[a,b]$, y $\varphi(t), \varphi'(t) \in L^2(a,b)$

(2) cumple las condiciones de frontera

$$\varphi(0) = \varphi(2\pi) = 0.$$

Es claro que el conjunto de funciones $D(P)$ que satisface las condiciones anteriores es **denso** en $L^2(0,2\pi)$.

P es un operador simétrico, dado que

$$\langle P\varphi, \psi\rangle = \int_0^{2\pi} i\varphi'(t)\overline{\psi(t)}dt = i\{\varphi(2\pi)\overline{\psi(2\pi)} - \varphi(0)\overline{\psi(0)}\} + \int_0^{2\pi} \varphi(t)\overline{i\psi'(t)}dt$$

para $\varphi, \psi \in D(P)$. Esto implica que

$$\langle P\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, P\psi\rangle.$$

BASES DE SCHAUDER y SUCESIONES BÁSICAS .

Definición. Sea $(X, \| \quad \|)$ un espacio de **Banach**. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X es una ***base de Schauder*** de X si para cada vector $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \quad \text{en } \| \quad \|.$$

Un espacio X con una **base de Schauder** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puede ser considerado como un espacio de sucesiones **identificando** cada $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n$ con la única sucesión de coeficientes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición. Sea X espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una ***sucesión básica*** si es **base de Schauder** para $\overline{span}(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

SUCESIONES EQUIVALENTES.

Definición. Sean X, Y espacios de Banach (posiblemente diferentes). Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, **sucesiones básicas** en X, Y respectivamente. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son **equivalentes** si:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i \tag{1}$$

convergen o divergen juntas, para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

UNA PROPIEDAD DE LAS SUCESIONES EQUIVALENTES.

Proposición. *Sean X, Y espacios de Banach, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ sucesiones básicas. Se tiene que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$* ***es equivalente*** *a $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si y sólo si existe una constante c, con $0 < c < \infty$, tal que*

$$c^{-1}\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|_X \leq c\left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i\right\|_Y \tag{2}$$

para toda sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Esto es, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***son equivalentes*** *si y sólo si la aplicación $\psi : span\{x_n\} \to span\{y_n\}$, dada por $\psi(x_n) = y_n$ es un* ***isomorfismo.***

En este caso se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son ***c-equivalentes***.

La demostración del resultado anterior puede verse en el libro de Carotheres.

EJEMPLOS DE SUCESIONES EQUIVALENTES.

Ejemplo.

(1) Una **sucesión básica** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para un espacio de Banach X es equivalente a la **base usual para** lp si y sólo si

$$c^{-1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right\|_X \leq c\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3}$$

para alguna constante $c > 0$ y para cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Cualquier **base ortonormal** en un espacio de Hilbert H separable es 1-equivalente $(c = 1)$ a la **base canónica de** l_2.

BASES DE RIESZ.

Definición. Sea H espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable. Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$ es una ***base de Riesz*** para H si

a) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **es total** en H, esto es $H = \overline{span}\{x_n\}_n$ o equivalentemente, el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es denso en H, es decir, para todo $h \in H$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe $c_1, c_2, ..., c_s \in \mathbb{C}$ y $n_1, n_2, ..., n_s \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left\| h - \sum_{i=1}^{s} c_i x_{n_i} \right\| < \varepsilon \tag{4}$$

b) Existen constantes $A, B > 0$, $A \leq B$ tales que

$$A \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \leq \left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x_n \right\|^2 \leq B \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \tag{5}$$

con $a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$.

CARACTERIZACIÓN DE LAS BASES DE RIESZ.

Proposición. *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable y sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en H. Las siguientes afirmaciones son equivalentes,*

(i) $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una* ***base de Riesz*** *para H.*

(ii) *Existe un operador lineal, acotado e invertible $\psi : H \longrightarrow H$ y una base ortonormal $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para H tal que*

$$\psi(e_n) = x_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iii) *Existe un producto interior $\langle .,. \rangle_1$ sobre el espacio lineal H, equivalente al producto interior sobre H tal que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base base ortonormal para $(H, \langle .,. \rangle_1)$.*

ESTABILIDAD DE BASES EN ESPACIOS DE BANACH Y TEOREMA DE PALEY -WIENER.

El criterio fundamental de estabilidad, e históricamente el primero, se debe a Paley -Wiener. Este se basa en el hecho elemental de que un operador lineal acotado T sobre un espacio de Banach es invertible cuando

$$\|I - T\| < 1.$$

Teorema (Paley -Wiener)**.**

Sea $\{x_n\}$ una base para un espacio de Banach X, y suponga que $\{y_n\}$ es una sucesión de elementos en X tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} c_n (x_n - y_n) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \right\| \tag{6}$$

para alguna constante λ, con $0 \leq \lambda < 1$ y para cualquier sucesión de escalares $\{c_n\}$. Entonces $\{y_n\}$ es una base para X equivalente a $\{x_n\}$.

Demostración.

Por hipótesis se tiene que si la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$$

es convergente entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n)$$

es convergente.

Definamos la aplicación $T : X \to X$ mediante

$$T\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x_n - y_n).$$

Evidentemente T es lineal y acotada y

$$\|T\| \leq \lambda < 1.$$

Luego el operador $I - T$ es invertible.

Como $(I - T)(x_n) = y_n$ para todo n, se sigue el resultado.

$\square$

VERSIÓN DEL TEOREMA DE PALEY -WIENER PARA ESPACIOS DE HILBERT.

La estructura de espacios de Hilbert permite reformular el Teorema de Paley -Wiener de la siguiente manera.

Teorema (Criterio de Paley-Wiener)**.**

Sea $\{e_n\}$ *una base ortonormal para un espacio de Hilbert* H *y sea* $\{z_n\} \subseteq H$ *una sucesión que satisface*

$$\left\| \sum_n c_n(e_n - z_n) \right\| \leq \lambda \left(\sum_n |c_n|^2 \right)^{1/2} \tag{7}$$

para alguna constante λ*, con* $0 \leq \lambda < 1$ *y para toda sucesión de escalares* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*. Entonces* $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de Riesz para* H*.*

TEOREMA 1/4 de KADEC
Y UN EJEMPLO DE UNA BASE DE RIESZ.

Teorema (Teorema 1/4 de Kadec)**.**

Si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de numeros reales para el cual se cumple*

$$|\lambda_n - n| < \frac{1}{4} \tag{8}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$*. Entonces La sucesión* $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisface el criterio de Paley - Wiener y por tanto forma una base de Riesz para* $L^2[-\pi, \pi]$*.*

Ejemplo. Sean $1 < p < \infty$ y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$|\lambda_n - n| \leq \frac{1}{2p}.$$

Usando el teorema anterior se puede probar que la sucesión $\left\{e^{i\lambda_n t}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz para $L^p[-\pi, \pi]$ (ver libro de Young).

BIORTOGONALIDAD .

Definición. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de elementos en un espacio de Banach

X y sea $(f_n)_n$ una sucesión en el **espacio dual** X^*.

El sistema $\{x_n, f_m\}_{n,m}$ $(n, m = 1, 2, ...)$ se dice que es un **sistema biortogonal** cuando

$$f_m(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{para } m = n \\ 0 & \text{para } m \neq n \end{cases} \tag{9}$$

BIORTOGONALIDAD EN ESPACIOS DE HILBERT .

Sea $\{\psi_n\}$ base para un espacio de Hilbert separable H y $\{\xi_n\}$ base ortonormal correspondiente, para algunos $B_{nm} \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\xi_m = \sum_n B_{nm} \psi_n$$

$$\psi_n = \sum_k \langle \xi_k, \psi_n \rangle \xi_k$$

Utilizando las relaciones anteriores se puede probar que $\overline{B} = (B_{mn})$ es invertible y

$$\psi_n = \sum_k B^{-1}_{kn} \xi_k.$$

Definiendo

$$\phi_m := \sum_j B^*_{mj} \xi_j$$

de donde

$$\langle \phi_m, \psi_n \rangle = \delta_{mn}.$$

El par $\{(\psi_n, \phi_n)\}$ recibe el nombre de un **sistema biortonormal completo** .

ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS BIORTONORMALES COMPLETOS .

- $\{\phi_n\}$ es la única sucesión con la propiedad anterior y además es base para H, y recibe el nombre de **base biortonormal** asociada con $\{\psi_n\}$.
- (Teorema de Bari) Dada una base $\{\psi_n\}$, el sistema biortonormal $\{(\psi_n, \phi_n)\}$ existe y $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle\psi_n, \psi\rangle|^2$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle\phi_n, \psi\rangle|^2$ convergen juntas para todo $\psi \in H$, si y solo si $\{\psi_n\}$ es una base de Riesz.

Si $\{\psi_n\}$ es base de Riesz para H, y $\psi \in H$ se tiene

$$\psi = \sum_n \langle\phi_n, \psi\rangle\psi_n = \sum_n \langle\psi_n, \psi\rangle\phi_n$$

Ejemplo. Si $\{e_n\}$ es una base ortonormal para H, entonces $\{e_n + e_1\}_{n=2}^{\infty}$ es completa y tiene $\{e_n\}_{n=2}^{\infty}$ como sucesión biortogonal.

BASES DE RIESZ Y OPERADORES MÉTRICOS .

Sea $\{\psi_n\}$ una **base de Riesz** y $\{(\psi_n, \phi_n)\}$ **sistema biortonormal completo** . Utilizando la **caracterización de las bases de Riesz** , se puede construir un único producto interior $\langle ., . \rangle_1$ sobre H que hace a la base de Riesz ortonormal.

Sean $\psi, \phi \in H$, existen $c_n, d_n \in \mathbb{C}$ únicos tales que

$\psi = \sum_n c_n \psi_n$, $\phi = \sum_n d_n \psi_n$. Luego

$$\langle \psi, \phi \rangle_1 = \sum_n c_n \overline{d_n}.$$

Utilizando la relación anterior y

$$\psi = \sum_n \langle \phi_n, \psi \rangle \psi_n$$

se tiene que

$$\langle\psi,\phi\rangle_1=\sum_n\langle\psi,\phi_n\rangle\langle\phi_n,\phi\rangle=\langle\psi,\eta_+\phi\rangle,$$

donde el operador $\eta_+ : H \longrightarrow H$ se define

$$\eta_+\psi:=\sum_n=\langle\phi_n,\psi\rangle\phi_n.$$

Usando la notación de bra-ket

de Dirac se tiene

$$\eta_+=\sum_n|\phi_n\rangle\langle\phi_n|.$$

Por ser $\{\psi_n\}$ base de Riesz se tiene que η_+ esta definido en casi todo H. Además no es difícil probar que este operador tiene inverso definido en casi todo H, y viene dado por

$$\eta_+^{-1}:=\sum_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|.$$

EL OPERADOR MÉTRICO .

En resumen el operador η_+ es **lineal, invertible, acotado, simétrico y definido positivo** .

Recibe el nombre de **operador métrico**

La construcción del **operador métrico** η_+ nos da la posibilidad de tener otra opción para calcular el producto interior $\langle .,.\rangle_1$, mediante

$$\langle .,.\rangle_1 = \langle .,.\rangle_{\eta_+} = \langle ., \eta_+ .\rangle$$

La introducción del **operador métrico** junto con la eliminación de algunas de las restricciones impuestas a este, permite tener un interesante método para extender la mecánica cuántica convencional.

OPERADORES SIMÉTRICOS Y MÉTRICOS .

Sean U_1 conjunto de operadores métricos con producto interior asociado $\langle .,. \rangle_{\eta_+}$, para algún $\eta_+ \in U_1$,

$O \in L(H_{fisico})$ un operador simétrico y $(H_{fisico}, \langle .,. \rangle_{\eta_+})$ espacio físico de los observables.

Asumimos que existe operador unitario $\rho : H \longrightarrow H_{fisico}$, H espacio de referencia, $o \in L(H)$ operador simétrico. Se define ver Most[ ]

$$O := \rho^{-1} o \rho \Leftrightarrow o := \rho O \rho^{-1}.$$

definamos $\rho := \sqrt{\eta_+}$

Es claro que $O \in L(H_f)$ es simétrico si y solo si $o \in L(H_{ref})$ lo es

OPERADORES PSEUDO -SIMÉTRICOS: UN EJEMPLO .

Ejemplo.

Sean $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \in \mathbb{Z}^+$ y x_i, p_i posición y operador momentum usuales, definimos los observables físicos:

$$X_i := \rho^{-1} x_i \rho$$

$$P_i := \rho^{-1} p_i \rho,$$

se llaman η_+-operadores **pseudo-simétrico** . posición y momentum respectivamente.

Se cumplen las propiedades de conmutación del algebra de Weyl- Heisenberg

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0, + + + [X_i, P_j] = \hbar \delta_{ij} I$$

OPERADORES PSEUDO-SIMÉTRICOS Y METRICOS .

Definición.

Sea H espacio de Hilbert separable, $A : D \subseteq H \to H$ operador lineal, se dice que A es **pseudo-simétrico** si $D(A)$ es denso en H, y existe un operador lineal simétrico invertible $\eta : H \to H$ tal que

$$A^{\dagger} = \eta A \eta^{-1}$$

El operador η recibe el nombre de **operador pseudo- métrico** asociado con el operador A

ALGUNAS PROPIEDADES .

Sea $\mathfrak{M}_A$ conjunto de operadores A que satisfacen la definición anterior, se tiene:

(1) A es **pseudo-simétrico** si, y solo si $\mathfrak{M}_A \neq \emptyset$

(2) $\mathfrak{M}_A \subseteq \mathfrak{M}_I$, donde I es el operador identidad y $\mathfrak{M}_I$ es el conjunto de operadores pseudo-métricos

(3) η es simétrico, tiene dominio denso y es acotado

(4) si $\eta_1 \in \mathfrak{M}_A$, entonces $\eta_r := r\eta_1$ para todo numero real $r \neq 0$

(5) η no es único

La no unicidad de η motiva la siguiente definición

Definición. Sea A un operador pseudo-simétrico en H y $\eta \in \mathfrak{M}_I$ operador pseudo-métrico. Entonces A se llama η-pseudo simétrico si $\eta \in \mathfrak{M}_A$.

EXISTENCIA DE OPERADORES MÉTRICOS.

Supongamos que existe $\eta_+ \in \mathfrak{M}_A$ operador definido positivo, se puede construir el espacio de Hilbert

$$(H_{\eta_+}, \langle ., . \rangle_{\eta_+})$$

con

$$\langle ., . \rangle_{\eta_+} := \langle ., \eta_+ . \rangle,$$

$$\langle ., A. \rangle_{\eta_+} = \langle A., . \rangle,$$

$H_{\eta_+} \subseteq H$, $\overline{H_{\eta_+}} = H$ es separable tal que $A : H_{\eta_+} \to H_{\eta_+}$ es simétrico. En particular el espectro $\sigma(A)$ es real.

Se puede probar que si A es densamente definido, tiene espectro discreto y es diagonalizable, entonces η_+ existe en $\mathfrak{M}_A$.

Teorema. *Sea $A : H \to H$ densamente definido, diagonalizable y tiene espectro real. Sea $\{\psi_n\}$ una base de Riesz consistente de los autovectores* *de* A *y* $\{(\psi_n, \phi_n)\}$ *una extension biortonormal. Entonces*

$$\eta_+ := \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|$$

es un operador definido positivo perteneciente a $\mathfrak{M}_A$.

PSEUDO-PRODUCTO INTERIOR.

Si en la definición de producto interior el axioma (3) es reemplazado por $(3')$ $\langle .,. \rangle$ es **no degenerado** ,esto es,

dado $\psi \in H$, la condición $\langle \phi, \psi \rangle = 0$ para todo $\phi \in H$ implica $\psi = 0$.

Una función $\prec .,. \succ : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ la cual satisface lo axiomas $(1), (2)$ y $(3')$ se llama **no degenerado** ,esto es,
pseudo-producto interior .

ALGUNAS PROPIEDADES.

Observación.

(1) todo producto interior sobre H es un pseudo-producto interior

(2) no todo pseudo-producto interior es un producto interior, esto es, existen pseudo- productos interiores tales que $\prec .,. \succ$ (3) falla, es decir, existen $\psi \in H$, $\psi \neq 0$ tal que $\prec \psi, \psi \succ \leq 0$. Tal pseudo- producto interior se llama **producto interior indefinido**

(3) para todo pseudo-producto interior sobre H

$$\prec .,. \succ = \langle ., \eta . \rangle := \langle ., . \rangle_\eta$$

donde $\langle ., . \rangle$ es el producto interior sobre H y $\eta \in \mathfrak{M}_I$ **operador métrico indefinido** no definido positivo.

ESPACIOS CON MÉTRICA INDEFINIDA.

Sea V espacio vectorial complejo, η operador pseudo-métrico, el par

$$(V, \prec .,. \succ)$$

recibe el nombre de espacio con métrica indefinida

tienen su aplicación en $P\Gamma$(operadores de paridad y tiempo de reversa)-symmetric models de la pseudo-Hermitian QM

OPERADORES MÉTRICOS, PSEUDO - MÉTRICOS Y MECÁNICA CUÁNTICA PSEUDO-HERMITIANA .

Sea $(\mathbb{H}, \langle ., . \rangle)$ espacio de Hilbert con producto interior dp, H Hamiltoniano sobre $\mathbb{H}$, diagonalizable, con espectro real pero no simétrico.

Sea $\langle ., . \rangle_1 = \langle ., . \rangle_{\eta_+}$ producto interior auxiliar dp sobre $\mathbb{H}$ donde H es simétrico, entonces

$$\eta_+ H$$

es simétrico en $\langle ., . \rangle$

Referencias

[1] A. Mostafazadeh. *Pseudo- Hermitian Quantum Mechanics*, arX1v :0810.5643v2. [quant- ph] 28 Nov 2008 Departament of Mathematics, Koc University.

[2] N. Akiezer I. Glazman, Theory of linear operators in Hilbert space, Trans. from the Russian(Two volumes bound as one), Repr. of the 1961 and 1963 transl, New York, NY: Dover Publications, xiv, 147, iv, 1993.

[3] G. Strandell, Stationary in Hilbert spaces, U.U.D.M. Report 2001:31, ISSN 1101-3591, Department of Mathematics, Uppsala University, 2001.

[4] R. M. Young, An introduction to Nonharmonic Fourier Series, Academic Press, New York, 1980.

[5] N. L. Carotheres, A Short course on Banach Space Theory, Department of Mathematics and statics, Bowling Green state University, Summer, 2000.