

***Dinámica del comportamiento fractal de  
las estructuras a gran escala del Cosmos***

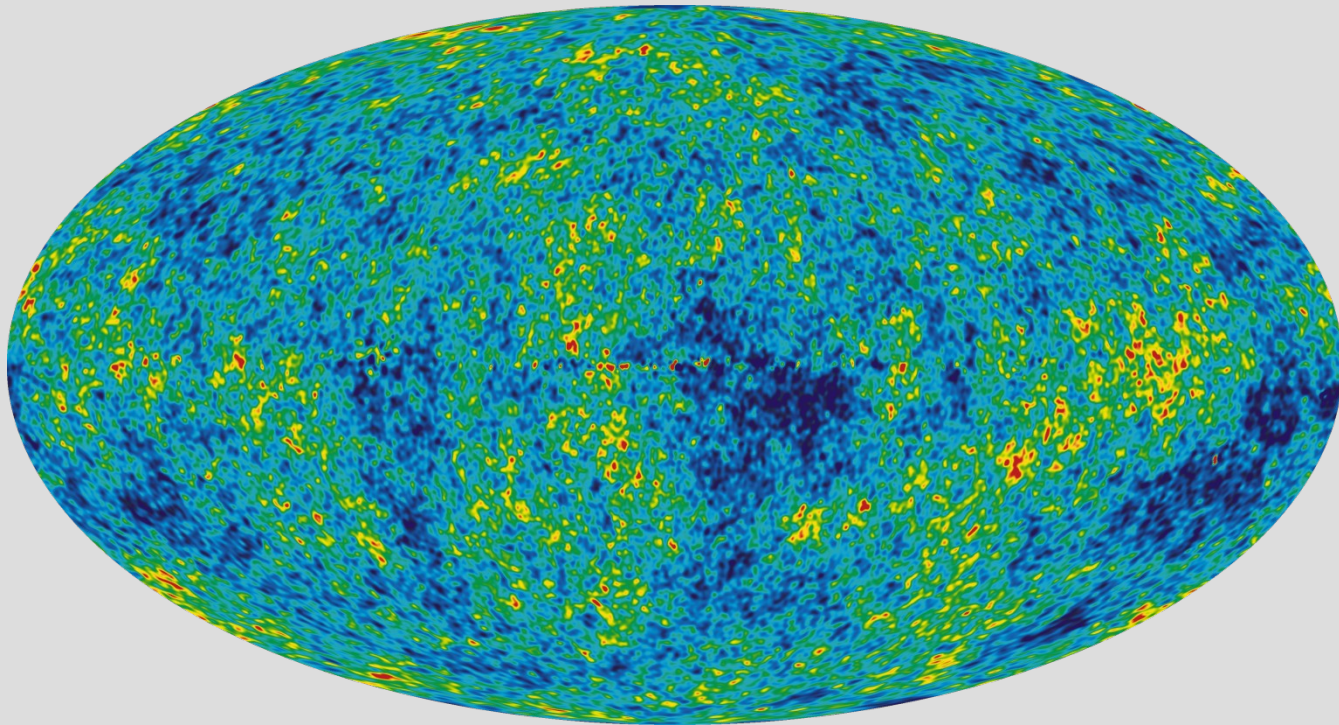
***Por: Msc. César Alexander Chacón***

***Candidato a Doctor Ciencias Física***

***Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias***

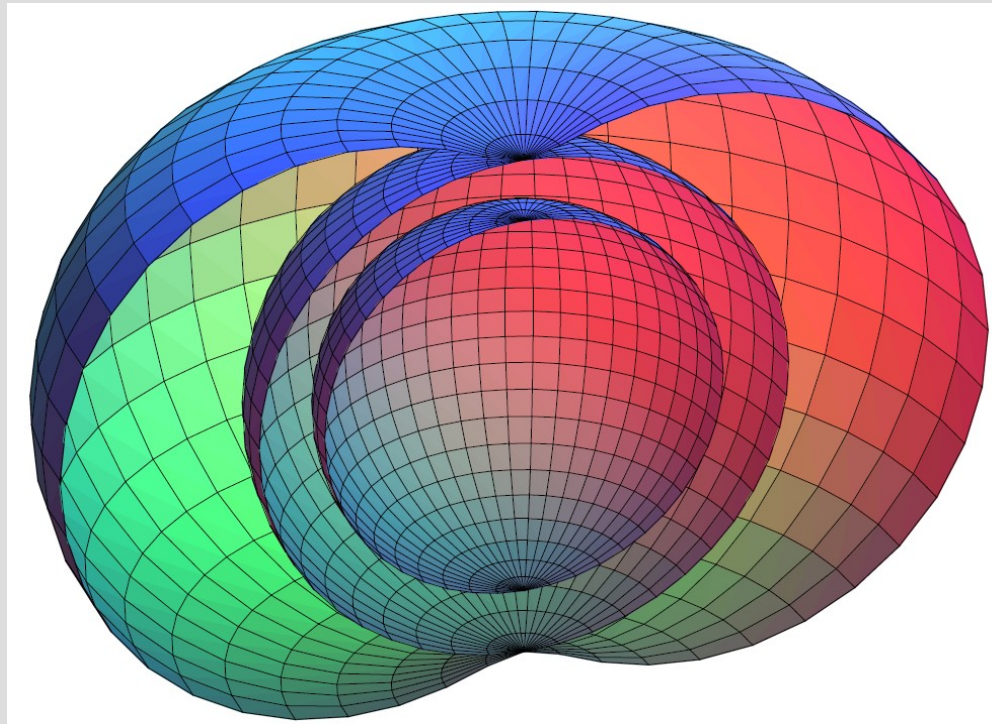
# Introducción

## Principio Cosmológico Estándar



# Ecuaciones de Campo de Einstein

$$R_{\beta}^{\alpha} - \frac{1}{2} R g_{\beta}^{\alpha} + \Lambda g_{\beta}^{\alpha} = \frac{-8 \pi G}{c^4} T_{\beta}^{\alpha}$$

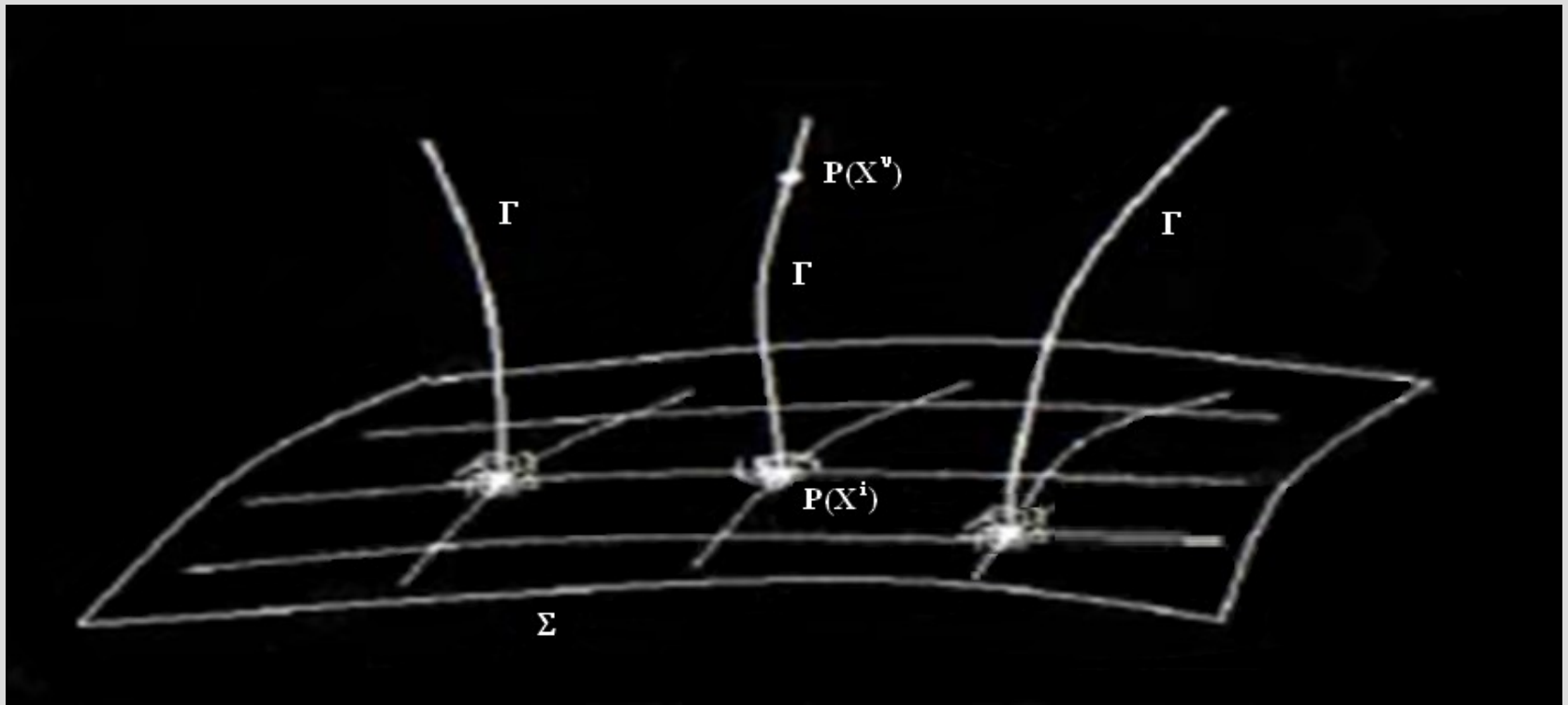


Shutz B, "A first course in General Relativity", Cambridge University Press, 2006

Tejeiro J. M., "Principios de Relatividad General", Universidad Nacional de Colombia, 2005

# Métrica de Robertson-Walker<sup>2,3</sup>

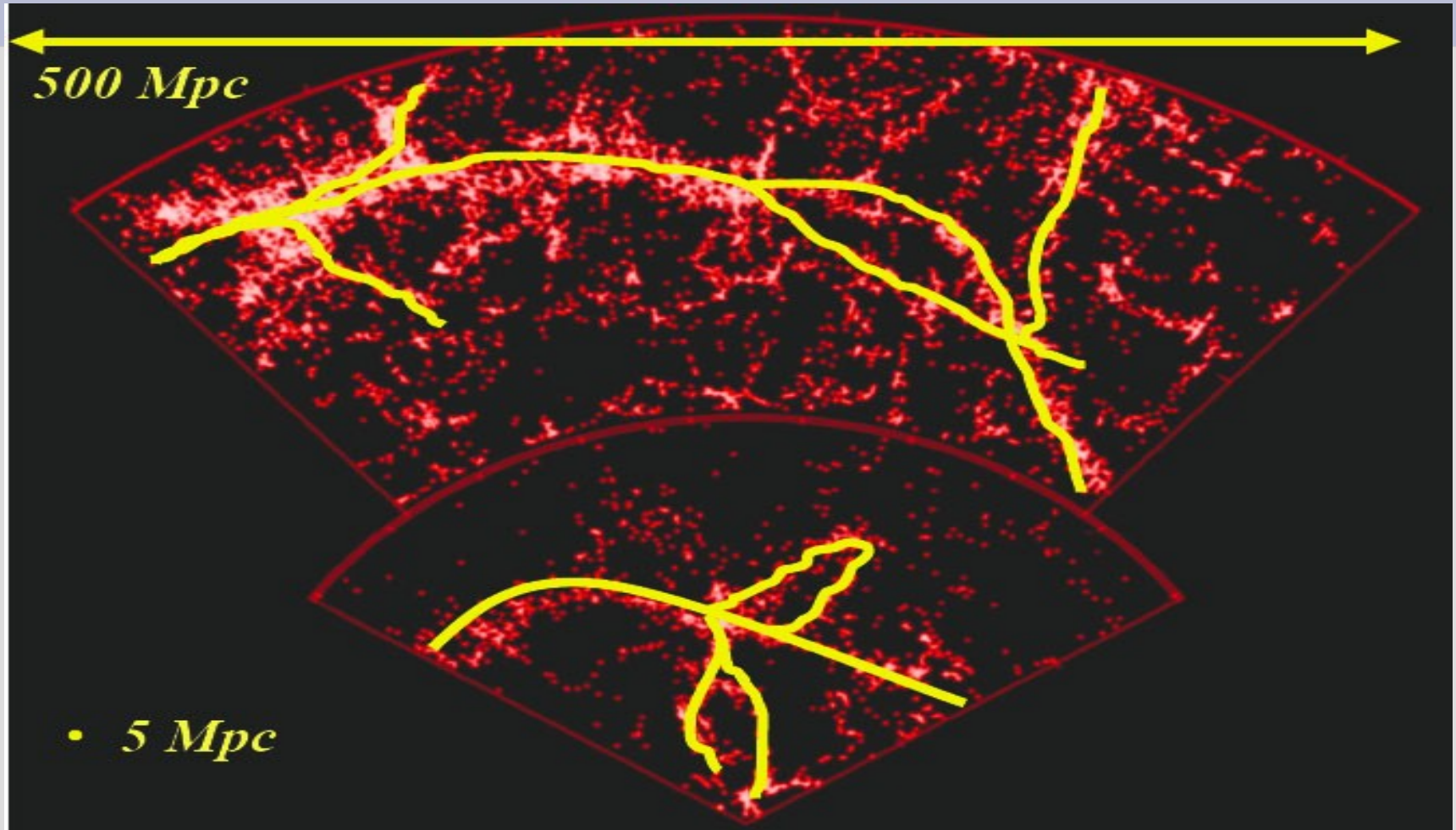
$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2) \right]$$



Shutz B, "A first course in General Relativity", Cambridge University Press, 2006

Tejeiro J. M., "Principios de Relatividad General", Universidad Nacional de Colombia, 2005

# Fractalidad en el agrupamiento galáctico



# Planteamiento del Problema

- El agrupamiento de galaxias en el universo observado, exhibe un comportamiento invariante de escala, con dimensión Fractal

$$N(r) \approx r^D$$

Con  $N$  el número de galaxias en una esfera de radio  $r$  y  $D$  la dimensión fractal

# Dimensión Fractal de Galaxias

Survey	$D_F$	Approx. Size
CfA1	1.7 (0.2)	1800
CfA2	$\sim 2$	11000
SSRS1	2.0 (0.1)	1700
SSRS2	$\sim 2$	3600
LEDA	2.1 (0.2)	75000
IRAS 1.2/2 Jy	2.2 (0.2)	5000
Perseus-Pisces	$\sim 2.1$	3300
ESP	1.8 (0.2)	3600
Las Campanas (LCRS)	2.2 (0.2)	25000
SDSS (r1)	$\sim 2$	$2 \times 10^5 - 1.5 \times 10^6$

# Principio Cosmológico Condicional

El universo aparece estadísticamente igual para todos los observadores situados en una galaxia como punto del conjunto fractal

Mandelbrot B, "The fractal Geometry of Nature", W.H. Freeman and Company, New York, 1982

Mittal A.K., Loiya Daksh, "Fractal dust model of the Universe based on Mandelbrot's Conditional Cosmological Principle and General Theory of Relativity", arXiv:astro-ph/0206300v1, 18 Jun 2002



# Justificación

La necesidad básica del ser humano de encontrar explicación acerca del origen del cosmos, en particular, las causas de la estructura jerárquica auto-similar en el universo, de acuerdo a los últimos informes sobre el agrupamiento galáctico contenido en los catálogos más recientes.

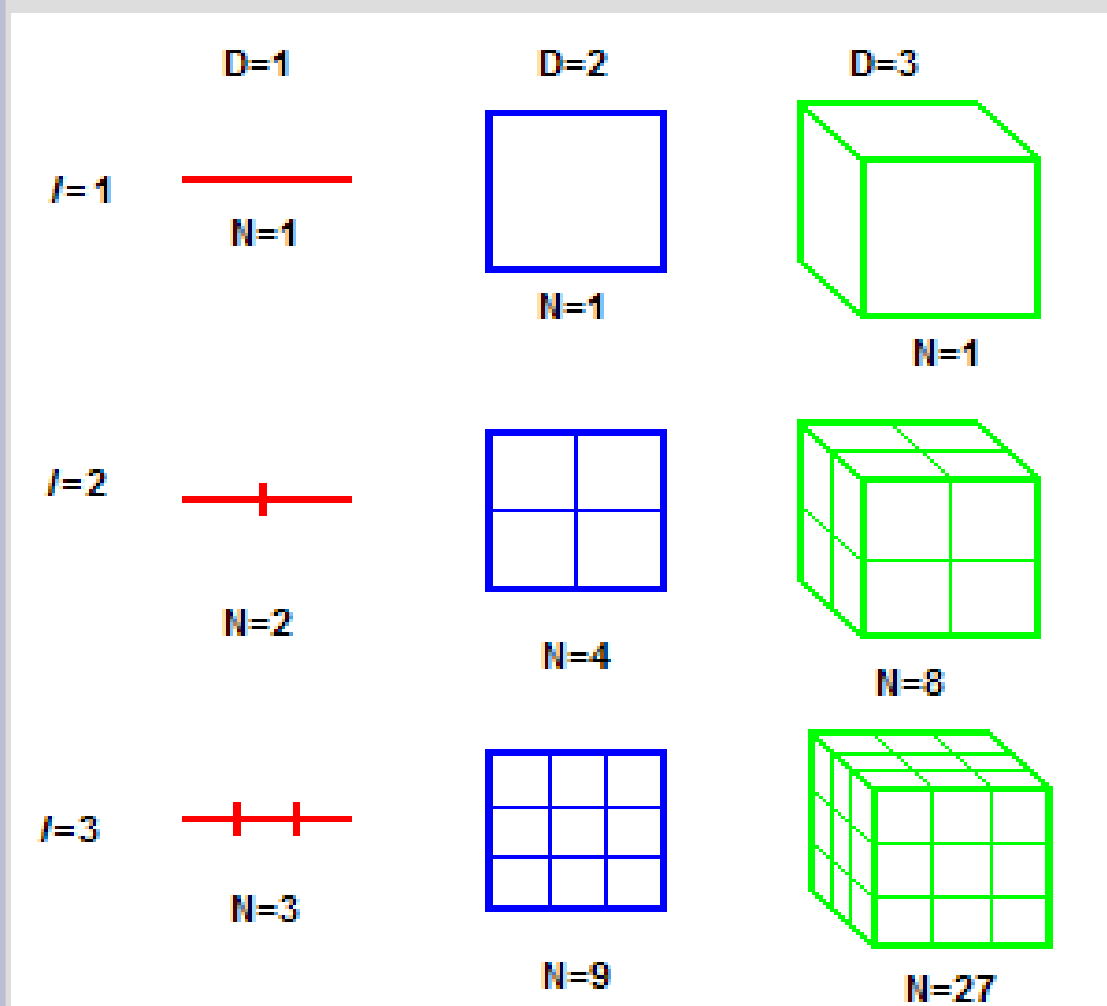
Reeves H, "Últimas noticias del Cosmos", Editorial Andrés Bello, 1996

Mureika J. R., "Fractal Holography: a geometric re-interpretation of cosmological large scale structure", arXiv:gr-qc/0609001v2 17 May 2007

Sylos Labini F, Pietronero L., "Complexity in Cosmology", Statistical properties of galaxy large scale structures", arXiv:astro-ph/0102320v1 19 Feb 2001

# Dimensión Fractal Autosimilar

## Dimensión Fractal Autosimilar

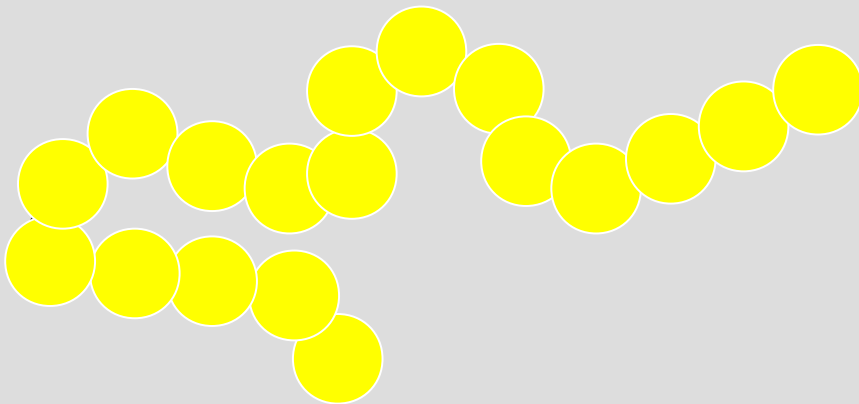


$$D = \frac{\log N(l)}{\log(l)}$$

# Dimensión de Hausdorff

## Dimensión de Hausdorff

$$h^d(A) = \lim_{(\epsilon \rightarrow 0)} N(\epsilon) \epsilon^d$$

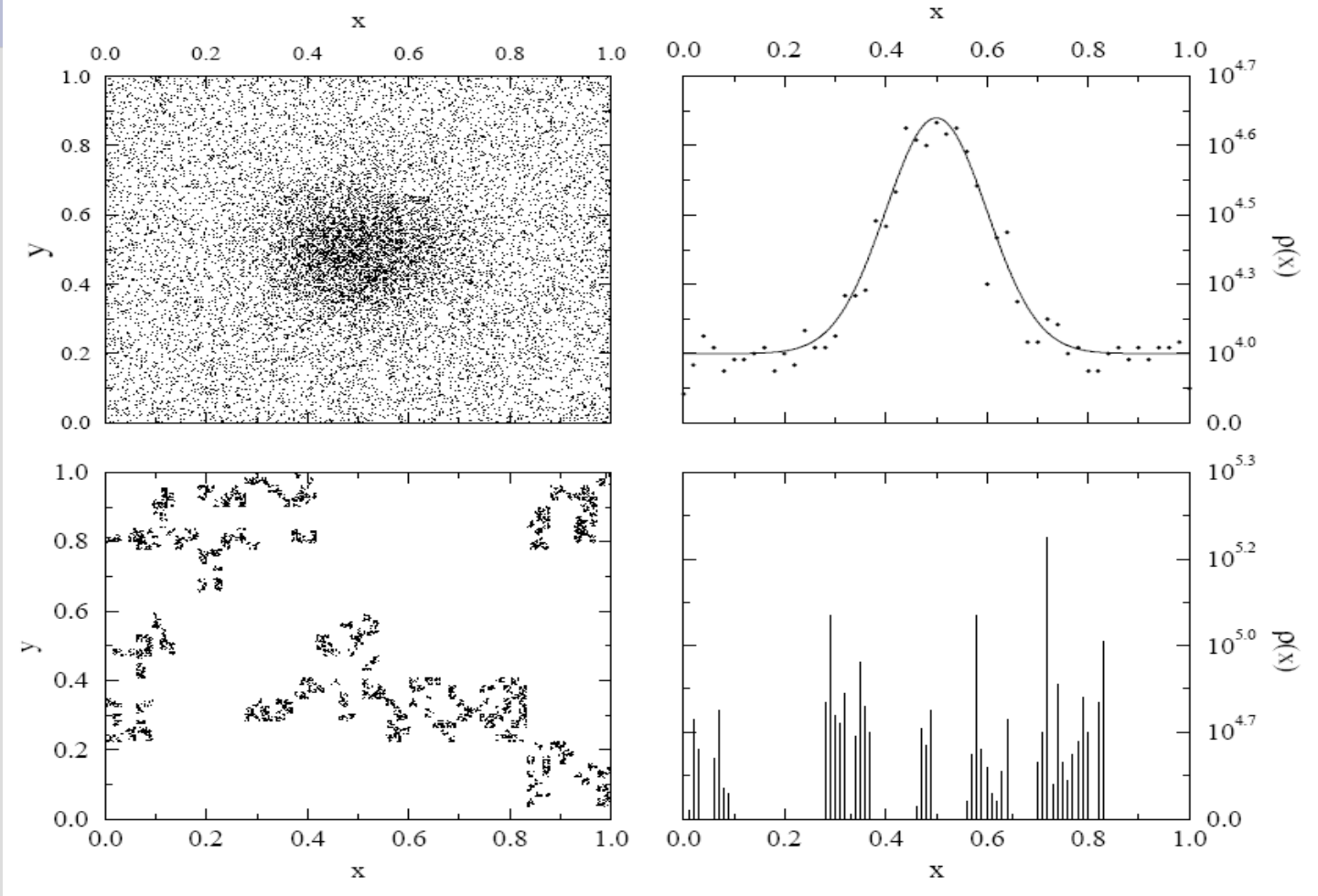


$$h^d(A) = \begin{cases} \infty & \text{si } d < D_H(A) \\ 0 & \text{si } d > D_H(A) \end{cases}$$

# Fractal

Definición: Un fractal es un objeto matemático que es autosimilar y cuya dimensión de Hausdorff es mayor que su dimensión topológica

# Ejemplo de distribuciones de masa regular (Arriba), multifractal (Abajo)



# Modelo Observacional

$$N = b \left[ 1 + \frac{R_1}{r} + \left( \frac{R_2}{r} \right)^2 \right] r^3$$

Región más interna:  $R_1 < r$   $N \approx bR_1^3 r$

Región intermedia:  $R_1 < r < R_2$   $N \approx bR_2^3 r$

Región externa:  $r \gg R_2$   $N \approx br^3$

# Modelo Newtoniano

$$\rho_m^H = \frac{3m}{4\pi r^3}$$

$$F = G \rho_m^H \frac{V}{r^2}$$

$$\langle F \rangle = G \rho_m^H \frac{V}{r^2} \left[ 1 + 2 \frac{\delta r}{r} + 3 \left( \frac{\delta r}{r} \right)^2 \right] r^3$$

$$\rho_m = \rho_m^H \left[ 1 + 2 \frac{\delta r}{r} + 3 \left( \frac{\delta r}{r} \right)^2 \right] r^3$$

# Modelo Relativista

De las ecuaciones de campo de Einstein la componente  $G^{00}$ , del tensor de Einstein para la métrica de Robertson-Walker (RW), para un universo homogéneo es:

$$G_{RW}^{00} = 3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]$$

En un universo fractal la componente tiene el mismo valor pero en los puntos del conjunto fractal y es cero en los demás, es decir

$$\rho(P) = \sum_i m \delta(P, P_i)$$

$G^{00}$  puede definirse en una superficie de tiempo constante  $\int G^{00} = 8\pi \int d\mu$

con:

$$\int \rho dV = \int d\mu = M_P(R) = C(t) R^D$$

Ribeiro M.B., "On Modelling a Relativistic Hierarchical (Fractal) Cosmology by Tolman's Spacetime – I. Theory" arXiv:0807.0866v1 [astro-ph] 5 Jul 2008

Mittal A.K., Loiya Daksh, "Fractal dust model of the Universe based on Mandelbrot's Conditional Cosmological Principle and General Theory of Relativity", arXiv:astro-ph/0206300v1, 18 Jun 2002



# Modelo Relativista

Proponiendo una solución basada en el modelo homogéneo e isotrópico donde se separan el comportamiento temporal y el espacial de la forma:

$$\hat{G}_{FRACTAL}^{00} = \left\{ \begin{array}{l} \hat{f}(\chi) G_{RW}^{00} \quad \forall P \in fractal \\ 0 \quad \text{caso contrario} \end{array} \right\}$$

Reemplazando:

$$4\pi G_{RW}^{00}(t) a^3(t) \int_0^{\chi} \hat{f}(\chi) \Sigma^2(\chi) d\chi = 8\pi C(t) a^D(t) \chi^D$$

Ribeiro M.B., "On Modelling a Relativistic Hierarchical (Fractal) Cosmology by Tolman's Spacetime – I. Theory" arXiv:0807.0866v1 [astro-ph] 5 Jul 2008

Mittal A.K., Loiya Daksh, "Fractal dust model of the Universe based on Mandelbrot's Conditional Cosmological Principle and General Theory of Relativity", arXiv:astro-ph/0206300v1, 18 Jun 2002

# Modelo Relativista

Que al efectuar separación de variables, igualando cada miembro a una constante :

$$G_{RW}^{00} = 2 \nu C(t) a^{D-3}(t)$$
$$\hat{f}(\chi) = \frac{D \chi^{D-1}}{\nu \Sigma^2(\chi)}$$

Si se supone que el número de galaxias en una esfera de radio  $R$  es el mismo en todas la épocas,

$C(t) = cte.$  entonces:

$$3 \left[ \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] = 6Ca^{D-3}$$

# Modelo Relativista

Solucionando la ecuación diferencial para  $D = 2$ :

$$a(t) = (C/2)(t - t_0)^2 + (2Ca_0 - k)^{1/2}(t - t_0) + a_0$$

Así es posible calcular el parámetro de desaceleración  $q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}}$

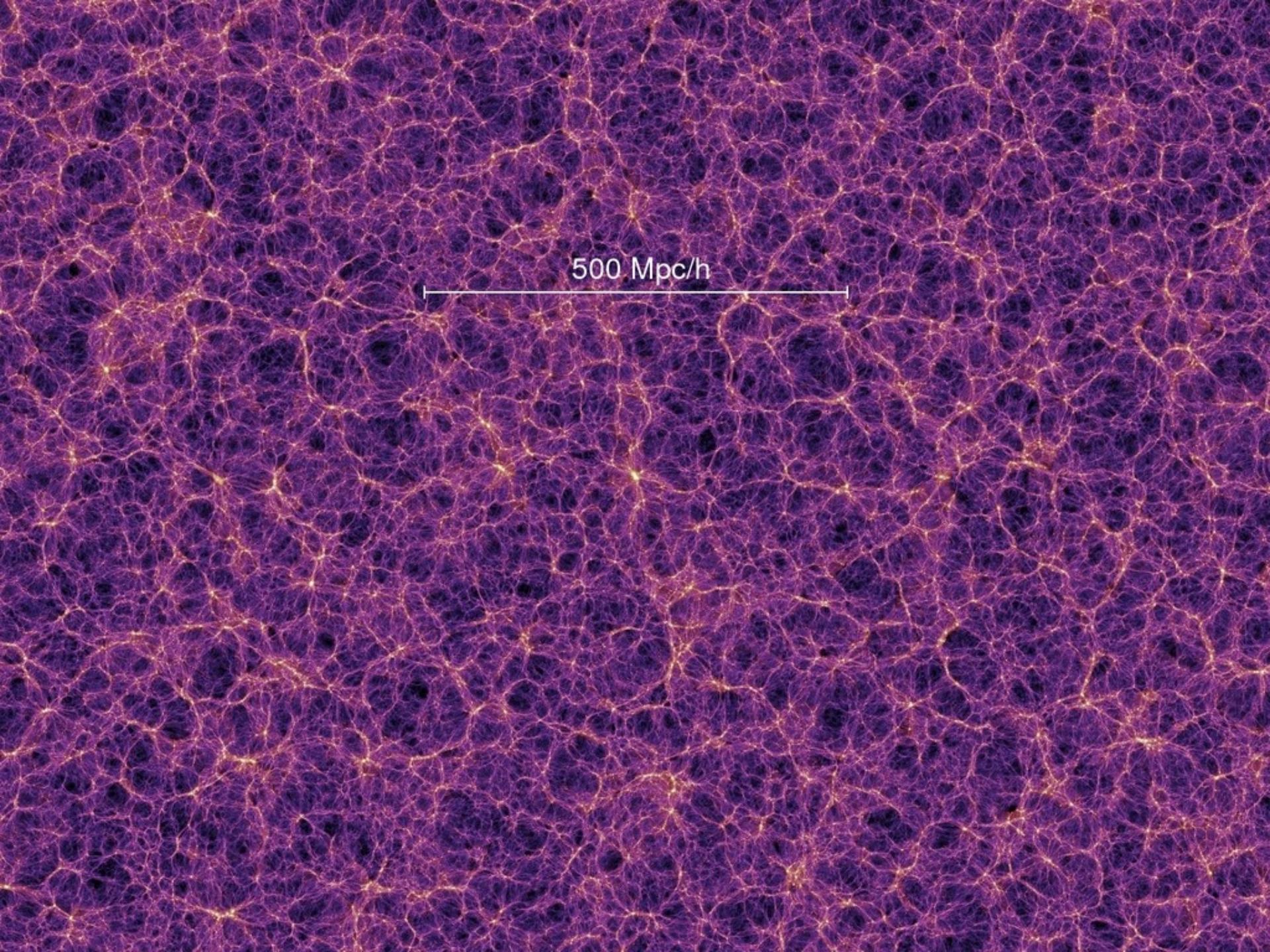
$$K = 0 \quad q_0 = -\frac{1}{2}$$

$$K = 1 \quad q_0 = -\frac{C}{C + \sqrt{C^2 + H_0^2}}$$

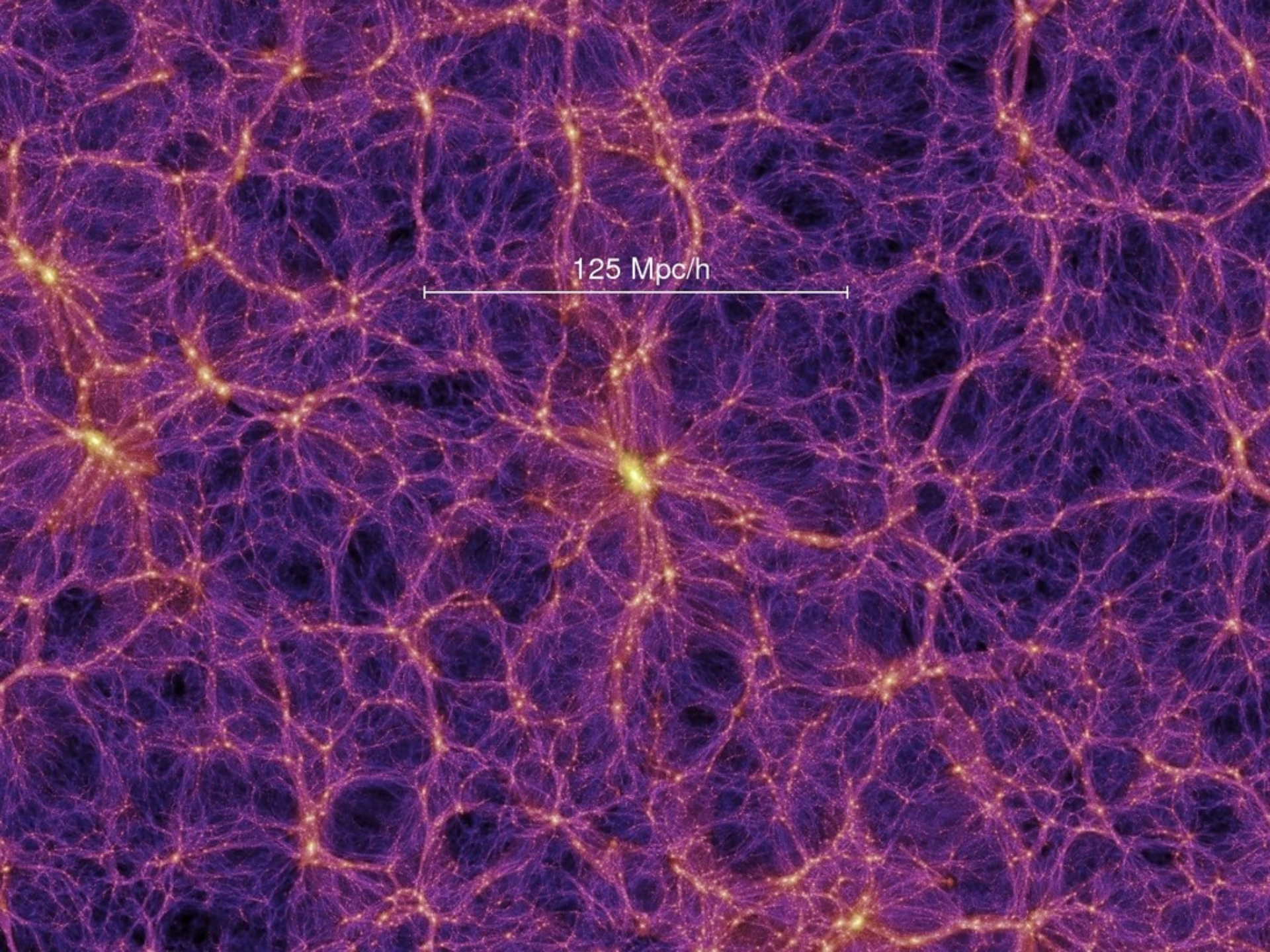
$$K = -1 \quad q_0 = -\frac{C}{C + \sqrt{C^2 - H_0^2}}$$

Ribeiro M.B., "On Modelling a Relativistic Hierarchical (Fractal) Cosmology by Tolman's Spacetime – I. Theory" arXiv:0807.0866v1 [astro-ph] 5 Jul 2008

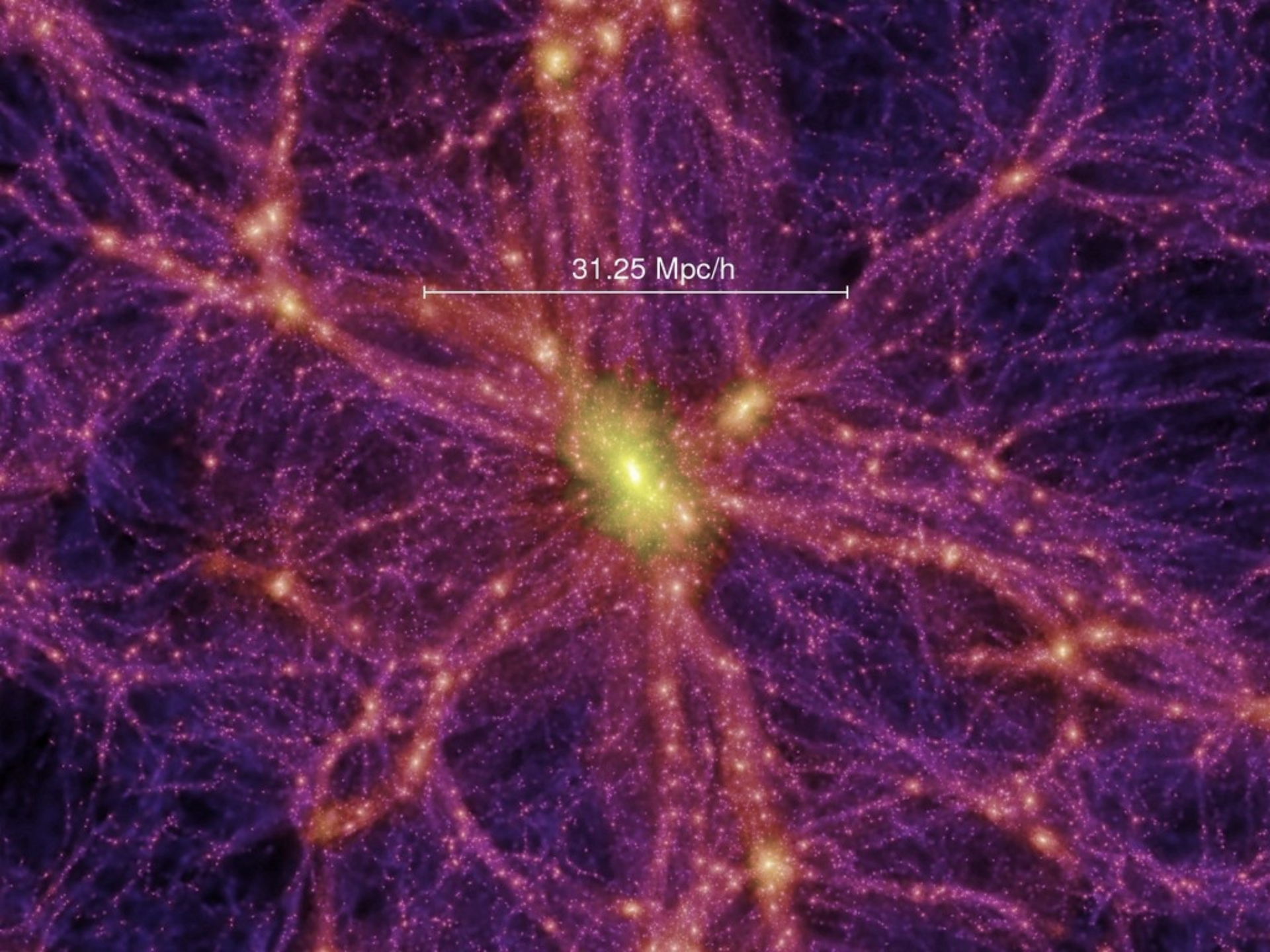
Mittal A.K., Loiya Daksh, "Fractal dust model of the Universe based on Mandelbrot's Conditional Cosmological Principle and General Theory of Relativity", arXiv:astro-ph/0206300v1, 18 Jun 2002



500 Mpc/h



125 Mpc/h



31.25 Mpc/h

**Gracias**

# 9. Referencias

- Baryshev Yu., “Field Fractal Cosmological Model as an Example of Practical Cosmology Approach”, arXiv:0810.062v1 [gr-qc] 1 Oct 2008
- Baryshev Yu. Teerikorpi P., “Fractal Approach to Large–Scale Galaxy Distribution”, arXiv:astro-ph/0505185v1 10 May 2005
- Baryshev Yu. Teerikorpi P., “Discovery of Cosmic Fractals”, World Scientific Publishing Co. 2002
- Campos D., Isaza F, “Prolegómenos a los sistemas dinámicos”, Universidad Nacional de Colombia, 2002
- Grujić P. V., Panković V. D., “On the fractal structure of the universe” arXiv:0907.2127v1 [physics.gen-ph] 13 Jul 2009
- Grujić P. V, A simple newtonian model for the fractal accelerating universe, Astrophysics and Space Science, 18 April 2004
- Grujić P. V, “The concept of a hierarchical Cosmos”, Pub. Astron. Obs. Belgrade NO. 75 (2003), 257-262
- Lerma H., “ Metodología de la investigación”, Ecoe Ediciones, 2006
- Longair, M. S., “Galaxy Formation”, Springer-Verlag, 2008
- Mandelbrot B, “The fractal Geometry of Nature”, W.H. Freeman and Company, New York, 1982
- Mittal A.K., Loiya Daksh, “Fractal dust model of the Universe based on Mandelbrot’s Conditional Cosmological Principle and General Theory of Relativity”, arXiv:astro-ph/0206300v1, 18 Jun 2002
- Mureika J. R., “Fractal Holography: a geometric re-interpretation of cosmological large scale structure”, arXiv:gr-qc/0609001v2 17 May 2007
- Rubiano G. N., “Iteración y Fractales”, Universidad Nacional de Colombia, 2009
- Ribeiro M.B., “On Modelling a Relativistic Hierarchical (Fractal) Cosmology by Tolman’s Spacetime – I. Theory” arXiv:0807.0866v1 [astro-ph] 5 Jul 2008
- Reeves H, “”Ultimas noticias del Cosmos”, Editorial Andrés Bello, 1996
- Shutz B, “A first course in General Relativity”, Cambridge University Press, 2006
- Sylos Labini F, Pietronero L., “Statistical Physics for Cosmic Structures”, arXiv:0712.0293v1 [cond-mat.stat-mech] 3 Dec 2007
- Sylos Labini F, Pietronero L., “Complexity in Cosmology , Statistical properties of galaxy large scale structures”, arXiv:astro-ph/0102320v1 19 Feb 2001
- Tejeiro J. M., “Principios de Relatividad General”, Universidad Nacional de Colombia, 2005