

**LA ESTRUCTURA CANÓNICA
DE LA RELATIVIDAD GENERAL**

Victor Tapia

*Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá*

Bogotá, Diciembre 2008

Se muestra que la formulación variacional de la Relatividad General se debe hacer en términos de una dinámica con vínculos. Se estudia la estructura general de los sistemas con vínculos: vínculos de primera y de segunda clase, vínculos primarios y secundarios, la conjetura de Dirac, etc. Se muestra que la covariancia general de la teoría de campos se puede caracterizar por medio de una formulación parametrizada de la teoría de campos. Se combinan estos dos ingredientes para dar una descripción variacional de la Relatividad General.

We show that the variational formulation of General Relativity must be done in terms of constrained dynamics. We study the general structure of constrained systems: first- and second-class constraints, primary and secondary constraints, the Dirac's conjecture, etc. We show that the general covariance of a field theory can be characterised by a parametrisation invariant formulation of field theory. We combine these two ingredients for a variational description of General Relativity.

Tabla de Contenido

- 0. Introducción**
- 1. La Relatividad General**
- 2. Sistemas con Vínculos. I**
- 3. Sistemas con Vínculos. II**
- 4. Teorías Parametrizadas**
- 5. Formulación Variacional de la Relatividad General**
- Z. Conclusiones**
- A. Análisis Tensorial**
- B. Geometría Riemanniana**
- C. Formulación Variacional de la Mecánica**
- D. Formulación Variacional de la Teoría de Campos**
- E. Geometría Riemanniana Extrínseca**

0. Introducción

Los principios variacionales juegan un papel importante en casi todas las áreas de la física y la Relatividad General no es la excepción. Este cursillo está dedicado a una discusión general de las formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana de la Relatividad General y por lo tanto de las teorías de campo en espacios curvos.

La teoría de la Relatividad General es la mejor teoría existente para la descripción de los fenómenos gravitacionales.

No obstante, desde un punto de vista teórico la situación no es tan reconfortante. La Relatividad General es la única teoría para la cual no existe una versión cuántica. Esto es en parte debido a que es una teoría no renormalizable. Pero aun así, las modificaciones introducidas siempre tropiezan con la estructura altamente no-lineal de la teoría. Las modificaciones, del tipo métrico-afín, que evitan estas no-linealidades, tampoco logran dar una solución al problema. Por lo tanto, pareciera ser que la Relatividad General es una teoría intrínsecamente no-cuantizable.

La no-cuantizabilidad parece provenir del hecho de que en esta teoría se estaría cuantizando la geometría, es decir, el fondo mismo sobre el cual se formula la teoría. Esta situación es bastante diferente de lo que ocurre en otras teorías en las que la cuantización se realiza sobre un fondo fijo.

A pesar de la imposibilidad de obtener una versión cuántica de la Relatividad General el estudio de su estructura canónica sigue siendo interesante pues ilustra los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano en teoría de campos, como también el concepto de sistemas Hamiltonianos con vínculos.

Usualmente se considera que la dinámica clásica es el primer nivel en el desarrollo de un entendimiento de las leyes físicas de la naturaleza para terminar en la mecánica cuántica. A pesar de los muchos éxitos de la mecánica cuántica en la descripción de fenómenos físicos básicos, continuamente encuentra dificultades en algunas situaciones físicas específicas. Por ejemplo, todos los intentos por cuantizar la gravitación han encontrado serias dificultades. Para encontrar una solución a estos problemas es útil reconsiderar los principios fundamentales de la dinámica clásica. En este contexto, los principios de la dinámica Hamiltoniana son de gran importancia, no sólo para una comprensión de las bases de la teoría clásica, sino que también para su cuantización.

Las teorías de las interacciones físicas fundamentales, tales como la

teoría electrodébil, o la Relatividad General, son teorías con simetrías de *gauge*. En las teorías de *gauge* el número de variables dinámicas en la acción es mayor que el número de variables requerido por la física. La presencia de variables no-físicas está cercanamente relacionada con la existencia de simetrías de *gauge*, las cuales están definidas por medio de transformaciones no-físicas de las variables dinámicas. Los sistemas dinámicos de este tipo son sistemas singulares y su análisis requiere una generalización de los métodos usuales. En el formalismo Hamiltoniano estos sistemas están caracterizados por la presencia de vínculos.

La investigación sistemática de los sistemas Hamiltonianos con vínculos se inició en la década de 1950 principalmente con el trabajo de Dirac. La formulación Hamiltoniana resulta en un cuadro claro de los grados de libertad físicos y de las simetrías de *gauge*, y hace posible una comprensión más profunda de los dinámica con vínculos. La estructura clásica resultante es importante para las bases de los métodos canónicos de cuantización.

La formulación Lagrangiana de una teoría de campos comienza con la introducción de una acción, la cual usualmente se define como como la integral de una densidad Lagrangiana sobre alguna región del espacio-tiempo. [superficie]

La formulación Hamiltoniana de una teoría de campos involucra una descomposición del espacio-tiempo en espacio y tiempo. Geométricamente, esto corresponde a una foliación del espacio-tiempo en hipersuperficies de tipo espacio Σ que no se intersectan. En esta descomposición el tensor métrico del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ se descompone en una métrica inducida h_{ij} , un vector de desplazamiento (shift) N^i y un escalar de lapso (lapse) N . La métrica inducida está relacionada con desplazamientos dentro de la hipersuperficie Σ y las funciones de lapse y shift con desplazamientos fuera de la hipersuperficie. El Hamiltoniano es un funcional de los campos y de sus momentos conjugados sobre Σ . En Relatividad General, el Hamiltoniano es un funcional de h_{ij} y de sus momentos conjugados p^{ij} , los cuales están relacionados con la curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ ; las funciones de lapse y shift se pueden especificar en forma arbitraria, dado que en el Hamiltoniano no aparecen como variables dinámicas.

[superficie]

En el capítulo 1 se presentan las principales ideas que llevan a la Relatividad General.

En los capítulos 2 y 3 se presentan las ideas básicas del método de Dirac y se desarrolla un enfoque sistemático para la construcción de generadores de *gauge* con base en la estructura Hamiltoniana conocida.

En el capítulo 4 se analizan las teorías parametrizadas, no-parametrizadas y reparametrizadas.

En el capítulo 5 se estudia la formulación variacional de la Relatividad General.

El apéndice A es un resumen de los principales resultados del análisis tensorial.

El apéndice B presenta la geometría Riemannian en el lenguaje tensorial del apéndice A.

El apéndice C es un resumen de la formulación variacional de la mecánica.

El apéndice D es un resumen de la formulación variacional de la teoría de campos.

En el Apéndice E se presentan algunos resultados de la geometría Riemanniana extrínseca que son útiles en el capítulo 5.

1. La Relatividad General

En este capítulo se describe la mecánica de Newton y la ley de gravitación universal. se describe el experimento de Galileo que lleva al Principio de Equivalencia, la afirmación de que los fenómenos gravitacionales y todos los fenómenos mecánicos dependen sólo de la geometría del espacio. La mecánica y la gravitación de Newton no satisfacen el Principio de Equivalencia. La gravitación de Newton predice órbitas elípticas, las cuales están de acuerdo con las leyes de Kepler. No obstante aparecen pequeñas discrepancias observacionales, tal como el avance del perihelio de Mercurio. La Relatividad Especial permite concluir que la geometría necesaria para la formulación de una teoría de la gravitación que incorpore el Principio de Equivalencia es la geometría Riemanniana. En primer lugar se determina cómo el potencial entra en el tensor métrico y por lo tanto el tipo de ecuación diferencial que debe satisfacer. Estas son las ecuaciones de Einstein. la solución de las ecuaciones de Einstein para un campo esféricamente simétrico es la métrica de Schwarzschild la cual predice un corrimiento del perihelio de Mercurio en completo acuerdo con la observación. Otras predicción de las ecuaciones de Einstein son las ondas gravitacionales. Posteriormente se construye el Lagrangiano de Einstein–Hilbert, el cual permite una formulación variacional de las ecuaciones de Einstein. Se estudia la variación de este Lagrangiano en su formulación métrica y en su formulación de Palatini. Finalmente se considera el acoplamiento con otros campos y las leyes de conservación. Finalmente se muestra que una separación (1+3) da origen a un sistema con vínculos.

Mecánica Newtoniana. El punto de partida de la Mecánica Newtoniana es lo que hoy conocemos como la Segunda Ley de Newton

$$\vec{F} = m \vec{a}. \quad (1.01)$$

donde $\vec{a} = (d^2\vec{x}/dt^2)$ es la aceleración. La introducción del concepto de fuerza fue fundamental para los desarrollos posteriores de la física, y una de sus primeras consecuencias fue la aparición de los conceptos de trabajo, de energía y de energía potencial.

Una partícula en movimiento tiene dos tipos de energía. La energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2, \quad (1.02)$$

y la energía potencial $V(\vec{x})$. A partir de la energía potencial es posible determinar la fuerza a la cual está sometida una partícula, la cual está dada por

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V. \quad (1.03)$$

Por lo tanto, para el caso de fuerzas que se pueden obtener a partir de un potencial, la Segunda Ley de Newton se escribe como

$$-\vec{\nabla}V = m\vec{a}. \quad (1.04)$$

El siguiente avance concierne la formulación variacional de las ecuaciones (1.04). En este caso el punto de partida es el Lagrangiano

$$L = T - V, \quad (1.05)$$

donde T y V son la energía cinética y la energía potencial, respectivamente. En este caso, las ecuaciones relevantes son las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales están dadas por

$$\frac{\delta L}{\delta \vec{x}} = -\vec{\nabla}V - m\vec{a} = 0. \quad (1.06)$$

A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se sigue que la energía

$$E = T + V, \quad (1.07)$$

es una cantidad conservada.

La ley de gravitación universal. En 1687 Newton dio una descripción analítica de la dinámica del sistema solar. En esta descripción de la gravitación dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , con posiciones \vec{r}_1 y \vec{r}_2 , y por lo tanto separados por una distancia $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, están sometidos a una fuerza atractiva dada por

$$F_{12} = \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2}, \quad (1.08)$$

donde $G = 6.67 \times 10^{-11} N m/kg^2$ es la constante gravitacional de Newton.

Cuando una de las partículas es muy masiva con respecto a la segunda (tal como sucede para el Sol y los planetas) se puede considerar que está casi en reposo y el origen del sistema de coordenadas se puede

elegir centrado en este cuerpo masivo. En este caso el potencial está dado por

$$V(\vec{r}) = -\frac{G m_1 m_2}{r}. \quad (1.09)$$

Por otra parte, el potencial de Newton es solución de la ecuación

$$\nabla^2 V = 0. \quad (1.10)$$

La teoría de Newton predice que las órbitas de los planetas son elípticas y periódicas, lo cual está de acuerdo con las leyes de Kepler.

El corrimiento del perihelio de Mercurio. La teoría de Newton tiene un problema empírico serio. Durante la primera mitad del siglo XIX se descubrió que los planetas giran en torno al Sol en órbitas que no son exactamente elípticas. Las órbitas reales son rosetas; estas curvas se pueden imaginar de la siguiente manera: consideremos un punto que recorre la elipse, pero al mismo tiempo hagamos que la elipse rote lentamente en torno a su foco en la misma dirección. La teoría de Newton explicaba este movimiento de la siguiente manera: la órbita de un planeta es una elipse exacta sólo si se supone que el Sol tiene un solo planeta. Dado que el Sol tiene varios planetas, estos interactúan gravitacionalmente y mutuamente perturban sus órbitas. Cuando estas perturbaciones se toman en cuenta, el efecto es *cualitativamente* el que se observa.

No obstante, en 1859, LeVerrier (el mismo que unos pocos años antes había predicho la existencia de Neptuno basado en cálculos similares) verificó si los movimientos calculado y observado del perihelio de Mercurio estaban o no de acuerdo. Resultó que no lo estaban, y que la discrepancia era mucho mayor que el error observacional. La velocidad calculada de rotación del perihelio era menor que la observada en $43''$ (segundos de arco) por siglo. Los astrónomos y los físicos trataron de explicar este efecto de varias maneras, por ejemplo, suponiendo la existencia de otro planeta, llamado Vulcano, que giraba en torno al Sol en una órbita interior a la de Mercurio y que lo perturbaba, o suponiendo que el Sol está aplastado como consecuencia de su rotación. En este último caso el campo gravitacional del Sol no sería esféricamente simétrico y un aplastamiento suficientemente grande explicaría la rotación adicional del perihelio de Mercurio. Ninguna de estas hipótesis pasó las pruebas observacionales. El hipotético planeta Vulcano tendría que haber sido tan masivo que y habría sido descubierto con los telescopios de la época,

pero no lo fue. Si el Sol fuera lo suficientemente aplastado para explicar el movimiento de Mercurio, esto haría que los planos de las órbitas planetarias oscilaran en forma periódica en torno a su posición media, y ese movimiento no se observaba.

El Principio de Equivalencia. En el siglo XVII Galileo realizó el experimento de dejar caer dos piedras de masa diferente en forma simultánea desde la Torre Inclinada de Pisa.¹ El resultado de este experimento fue que ambas piedras llegaban al suelo al mismo tiempo. La conclusión de este experimento es que los fenómenos gravitacionales no dependen de la masa de los cuerpos. Por otra parte, otros experimentos que involucran planos inclinados, superficies, etc., que muestran que la trayectoria de los cuerpos no depende de sus masas, sino más bien de la configuración geométrica del problema. La conclusión es que los fenómenos gravitacionales, y en general la dinámica de los cuerpos, depende sólo de la geometría del problema.

Este resultado es la base del Principio de Equivalencia el cual, en un lenguaje moderno, establece que los efectos de una fuerza gravitacional son indistinguibles de los efectos de una fuerza inercial. Las fuerzas inerciales son de carácter puramente geométrico y por lo tanto la fuerza gravitacional también lo debe ser. Además, para una fuerza inercial no existe un potencial y por lo tanto tampoco debe existir uno para la fuerza gravitacional. Por lo tanto, no se debe tratar de describir la gravitación agregando un potencial a las ecuaciones de movimiento, sino más bien incorporar los efectos de la gravitación a través de la geometría del espacio.

La geometría Euclideana no es adecuada para explicar los fenómenos gravitacionales pues en este caso la dinámica sería trivial: sólo existirían movimientos rectilíneos uniformes.

La Relatividad Especial. La mecánica de Newton está formulada en un espacio de tres dimensiones y la evolución de los sistemas mecánicos está descrita en términos del tiempo t . En este sentido, las leyes de la mecánica de Newton son invariantes bajo transformaciones que no mezclan el espacio y el tiempo. Estas son las transformaciones de Galileo.

En 1905 Einstein publicó su artículo acerca de la electrodinámica

¹ Probablemente, Galileo nunca realizó tal experimento, pero esta descripción ha pasado a ser emblemática.

de los cuerpos en movimiento. Einstein comienza observando que las ecuaciones de Maxwell son asimétricas. A partir de esta observación puramente estética Einstein concluye que la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas debe ser una constante. Para que esto sea así las ecuaciones de Maxwell deben ser invariantes bajo un grupo de transformaciones que no son las transformaciones de Galileo, sino las transformaciones de Lorentz. Estas transformaciones son las invariancias de un espacio de Minkowski. Un espacio de Minkowski está caracterizado por un elemento de línea de la forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.11)$$

El uso de los espacios de Minkowski da origen a la teoría de la Relatividad Especial.

Se debe hacer notar que Einstein basó el desarrollo de la Relatividad Especial en un criterio puramente estético sin ningún deseo de explicar uno u otro fenómeno no explicado hasta ese momento por la física clásica. A pesar de esta independencia con respecto a los aspectos fenomenológicos, la Relatividad Especial logra explicar, entre otros, el resultado nulo del experimento de Michelson y Morley.

Una partícula libre en el espacio Euclideano tri-dimensional está descrita por el Lagrangiano (1.05) con $V = 0$. A continuación deseamos obtener una generalización que sea invariante de Lorentz. Para esto consideremos el Lagrangiano

$$L_R = -m c \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}, \quad (1.12)$$

donde ahora el punto denota derivación con respecto a un parámetro t . Si hacemos $x^0 = ct$ entonces obtenemos

$$L_R = -m c \sqrt{c^2 - \vec{v}^2}. \quad (1.13)$$

Para velocidades pequeñas, $\mathbf{v} < c$, se obtiene

$$L_R \approx -m c^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}^2. \quad (1.14)$$

Por lo tanto, para velocidades pequeñas la descripción de la Relatividad Especial coincide con la descripción de la Mecánica Clásica.

La formulación covariante de la electrodinámica muestra que la geometría Euclideana no es adecuada para la formulación de los fenómenos electromagnéticos. En este caso la geometría adecuada es la geometría

de Minkowski. Sin embargo, la geometría de Minkowski tampoco es adecuada para una descripción de la gravitación, dado que corresponde a un espacio plano y por lo tanto las trayectorias de los cuerpos serán líneas rectas.

El tensor métrico gravitacional. En la naturaleza se observan cuerpos (tales como los planetas) cuyas trayectorias son curvas. Por lo tanto, se debe considerar algún tipo de geometría que pueda dar origen a trayectorias curvas. Esto es posible en una geometría Riemanniana. A continuación encontraremos un tensor métrico que permita una formulación covariante de una partícula en un potencial.

El Lagrangiano que sirve como punto de partida es

$$L_G = \frac{1}{2} m \gamma_{ij}(\vec{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j - V(\vec{x}) + V_0, \quad (1.15)$$

donde V_0 es una constante que no afecta la dinámica pero que sirve para establecer la comparación con el Lagrangiano relativista. De acuerdo con los resultados de la relatividad especial, una generalización covariante adecuada es

$$L_R = -m c \sqrt{g_{\mu\nu}(\vec{x}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (1.16)$$

En este caso las ecuaciones de movimiento se generalizan a las ecuaciones de la geodésica, es decir

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \{\mu_{\nu\lambda}\}(\mathbf{g}) \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0, \quad (1.17)$$

donde $\{\}\mathbf{(g)}$ es el símbolo de Christoffel del tensor métrico \mathbf{g} . Por lo tanto, el problema se traduce ahora en determinar el tensor métrico adecuado para cada situación. Para esto es necesario relacionar la geometría con la distribución de materia, es decir, se debe describir la manera cómo se acoplan la geometría y la materia.

Si colocamos $x^0 = ct$ se obtiene

$$L_R = -m c \sqrt{g_{00} c^2 + 2 g_{0i} c \dot{x}^i + g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j}. \quad (1.18)$$

Para velocidades pequeñas se tiene

$$L_G \approx -m c^2 g_{00}^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(2 \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\dot{x}^i}{c} + \frac{g_{ij}}{g_{00}} \frac{\dot{x}^i \dot{x}^j}{c^2} \right) \right]. \quad (1.19)$$

En el Lagrangiano (1.15) no aparecen términos lineales en $\dot{\vec{x}}$, por lo tanto $g_{0i} = 0$. Entonces el Lagrangiano (1.19) se reduce a

$$L_R \approx -m c^2 g_{00}^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{g_{ij}}{g_{00}} \frac{\dot{x}^i \dot{x}^j}{c^2} \right]. \quad (1.20)$$

Comparando con (1.15) se obtiene

$$-m c^2 g_{00}^{1/2} \approx -V + V_0. \quad (1.21)$$

Cuando $V = 0$ se debe tener $g_{00} = 1$. Entonces se obtiene

$$g_{00} \approx 1 - 2 \frac{V}{m c^2}. \quad (1.22)$$

En el caso del potencial gravitacional, $V = G M m/r$, la relación anterior se escribe como

$$g_{00} \approx 1 - 2 \frac{M}{r}. \quad (1.23)$$

donde $G M/c^2$ se ha redefinido como M .

Las ecuaciones de Einstein. Ahora determinemos el tipo de ecuación que debe satisfacer el tensor métrico. El potencial gravitacional satisface la ecuación de Laplace (1.10). Por lo tanto, una generalización adecuada debe ser de la forma

$$\partial^2 g_{00} \approx 0. \quad (1.24)$$

Para obtener una expresión covariante, esta ecuación debe estar escrita en términos de un tensor que contenga segundas derivadas del tensor métrico. Los candidatos más obvios son el tensor de Riemann-Christoffel, el tensor de Ricci y la curvatura escalar. En el primer caso tendríamos

$$R_{\lambda\rho\mu\nu}(\mathbf{g}) = 0. \quad (1.25)$$

Sin embargo, esta ecuación caracteriza a un espacio plano y esta no es una solución a nuestro problema. La siguiente posibilidad es

$$R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) = 0. \quad (1.26)$$

Estas son las ecuaciones que permiten una generalización covariante de la gravitación. Una consecuencia de la ecuación (1.26) es $R(\mathbf{g}) = 0$. Dado que $R(\mathbf{g})$ es una combinación lineal del tensor de Ricci, la ecuación

$$R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) - \alpha R(\mathbf{g}) g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.27)$$

para $\alpha \neq 1/4$, también es una solución a nuestro problema.

En el caso en que $\alpha = 1/2$ la combinación que aparece al lado izquierdo de la ecuación (1.28) es el tensor de Einstein. Debido a la tercera identidad de Bianchi, (B.42), se tiene una ecuación de continuidad, la cual da origen a leyes de conservación, y por lo tanto facilita la integración de las ecuaciones de campo. Por supuesto, la existencia de leyes de conservación es sólo un aspecto estético de las ecuaciones (1.28) y no existe ninguna razón empírica para elegir $\alpha = 1/2$. No obstante, como veremos más adelante, la elección correcta es $\alpha = 1/2$, y se obtiene

$$R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2} R(\mathbf{g}) g_{\mu\nu} = 0, \quad (1.28)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional.

La solución de Schwarzschild. La solución de Schwarzschild corresponde a la solución de las ecuaciones de Einstein (1.28) con simetría esférica. La solución está dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (1.29)$$

La componente g_{00} coincide con la expresión obtenida anteriormente, (1.23).

Las trayectorias de los planetas se obtienen como las geodésicas de esta métrica. las órbitas resultantes son elipses con corrimiento del perihelio, es decir, rosetas. El corrimiento predicho es 43".

Ondas gravitacionales. La existencia de la radiación gravitacional es otra de las predicciones de la Relatividad General. Al principio el avance en la comprensión teórica de esta radiación fue lento, debido a que las ecuaciones (1.28) son altamente no-lineales. también el aspecto

experimental de este tema necesitó un largo tiempo para desarrollarse. la radiación gravitacional fue detectada en forma indirecta por Taylor and Hulse en 1974, quienes observaron sus efectos sobre el periodo orbital de un sistema binario de dos estrellas de neutrones. Los esfuerzos por detectar ondas gravitacionales también se ven seriamente afectados por la extrema debilidad de las ondas que llegan a la Tierra.

El Lagrangiano de Einstein–Hilbert. El siguiente paso en la formulación de una teoría covariante de la gravitación es la construcción de una densidad Lagrangiana adecuada. El carácter de densidad se puede obtener considerando el determinante del tensor métrico, es decir, $g^{1/2}$. Por lo tanto, lo que hace falta para completar nuestra construcción es un escalar. Ahora bien, las ecuaciones de Einstein contienen derivadas de segundo orden del tensor métrico y por lo tanto el Lagrangiano debe ser una función de primer orden en las derivadas del tensor métrico. Sin embargo, es imposible construir una función escalar con estas características (la única solución es una constante Λ). La solución a este *impasse* es usar un Lagrangiano que contenga segundas derivadas pero de manera tal que estas aparezcan sólo a través de una divergencia, dado que de este modo no contribuirían a las ecuaciones de campo. El único escalar con las propiedades anteriores es el escalar de curvatura $R(\mathbf{g})$. Por lo tanto, un Lagrangiano adecuado para las ecuaciones de Einstein es

$$\mathcal{L}_{EH} = R(\mathbf{g}) g^{1/2}, \quad (1.30)$$

donde “EH” quiere decir Einstein–Hilbert, dado que Hilbert propuso en forma contemporánea las mismas ecuaciones. Lo que es más importante para una formulación variacional no es la densidad Lagrangiana sino la acción, que en este caso está dada por

$$S_{EH} = \int \mathcal{L}_{EH} d^4x = \int R(\mathbf{g}) g^{1/2} d^4x. \quad (1.31)$$

A continuación procederemos a obtener las ecuaciones de Einstein a partir del Lagrangiano de Einstein–Hilbert. Para esto es necesario considerar variaciones de la acción con respecto al tensor métrico. Sin embargo, esta variación resulta ser bastante engorrosa debido a que por una parte el Lagrangiano depende de segundas derivadas del tensor métrico y por otra parte es una función altamente no-lineal del tensor métrico y sus derivadas.

Como mencionamos anteriormente, las segundas derivadas se pueden absorber en un término de superficie. De hecho, es posible escribir

$$\mathcal{L}_{EH}(\mathbf{g}) = \mathcal{L}_{Landau}(\mathbf{g}) + \frac{\partial \mathcal{W}^\mu}{\partial x^\mu}. \quad (1.32)$$

donde

$$\mathcal{L}_{Landau}(\mathbf{g}) = g^{\mu\nu} \left(\left\{ \begin{matrix} \rho \\ \mu\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu\rho \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho \\ \sigma\rho \end{matrix} \right\} \right) g^{1/2}, \quad (1.33)$$

es el Lagrangiano de Landau y

$$\mathcal{W}^\mu = \left(g^{\lambda\rho} \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} - g^{\mu\rho} \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\rho \end{matrix} \right\} \right) g^{1/2}. \quad (1.34)$$

El Lagrangiano de Landau da origen a las ecuaciones de Einstein. Sin embargo, no es covariante y por lo tanto no es adecuado para otros propósitos.

El tensor de Riemann–Christoffel se puede escribir en términos sólo del símbolo de Christoffel, (B.17). Por lo tanto, el tensor de Ricci, que es una contracción del tensor de Riemann, (B.18), también depende sólo del símbolo de Christoffel.

Por lo tanto, podemos reescribir el Lagrangiano de Einstein–Hilbert como

$$\mathcal{L}_{EH} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\{\}) g^{1/2}, \quad (1.35)$$

La variación de este Lagrangiano está dada por

$$\delta \mathcal{L}_{EH} = \left(R_{\mu\nu}(\{\}) - \frac{1}{2} R(\{\}) g_{\mu\nu} \right) g^{1/2} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g^{1/2} \delta R_{\mu\nu}(\{\}). \quad (1.36)$$

Ahora debemos determinar la variación del tensor de Ricci en términos de la variación del símbolo de Christoffel. La variación del tensor de Riemann, a primer orden con respecto a la variación del símbolo de Christoffel, es

$$\delta R^\lambda_{\rho\mu\nu}(\{\}) = \nabla_\mu (\delta \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\rho \end{matrix} \right\}) - \nabla_\nu (\delta \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\rho \end{matrix} \right\}). \quad (1.37)$$

Por lo tanto, la variación del tensor de Ricci está dada por

$$\delta R_{\mu\nu}(\{\}) = \delta^\rho_\lambda \delta R^\lambda_{\mu\rho\nu}(\{\}) = \delta^\rho_\lambda [\nabla_\rho (\delta \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\}) - \nabla_\nu (\delta \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\mu \end{matrix} \right\})]. \quad (1.38)$$

Realizando una integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_{EH} &= \left(R_{\mu\nu}(\{\}) - \frac{1}{2} R(\{\}) g_{\mu\nu} \right) g^{1/2} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - \nabla_\rho \left(g^{\mu\nu} g^{1/2} \delta^\rho_\lambda \right) \delta \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \nu\mu \end{matrix} \right\} + \nabla_\nu \left(g^{\mu\nu} g^{1/2} \delta^\rho_\lambda \right) \delta \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \rho\mu \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Pero, los coeficientes que acompañan a $\delta\{\}$ son idénticamente cero dado que $\nabla \mathbf{g} \equiv 0$. Por lo tanto, la ecuación (1.36) se reescribe como

$$\delta \mathcal{L}_{EH} = \left(R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2} R(\mathbf{g}) g_{\mu\nu} \right) g^{1/2} \delta g^{\mu\nu}, \quad (1.40)$$

y se obtienen las ecuaciones de Einstein (1.28).

El método de Palatini. Otra manera de obtener las ecuaciones de Einstein a partir del Lagrangiano de Einstein–Hilbert fue desarrollada por Palatini. El método de Palatini se basa en la observación, como ya vimos, de que el tensor de Riemann–Christoffel se puede escribir en términos sólo del símbolo de Christoffel, y lo mismo también es cierto para el tensor de Ricci. El método de Palatini considera el Lagrangiano de Einstein–Hilbert en el cual el tensor de Ricci, en vez de estar escrito en términos del símbolo de Christoffel está escrito en términos de una conexión genérica, es decir,

$$\mathcal{L}_{EHP} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\mathbf{\Gamma}) g^{1/2}. \quad (1.41)$$

Por lo tanto, podemos obtener las ecuaciones de campo considerando las variaciones con respecto a la métrica y con respecto a la conexión.

La variación de este Lagrangiano está dada por

$$\delta \mathcal{L}_{EHP} = \left(R_{\mu\nu}(\mathbf{\Gamma}) - \frac{1}{2} R(\mathbf{\Gamma}) g_{\mu\nu} \right) g^{1/2} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} g^{1/2} \delta R_{\mu\nu}(\mathbf{\Gamma}). \quad (1.42)$$

Ahora debemos determinar la variación del tensor de Ricci en términos de la variación de la conexión. La variación del tensor de Riemann, a primer orden con respecto a la variación de la conexión, es

$$\delta R^\lambda_{\rho\mu\nu}(\mathbf{\Gamma}) = \nabla_\mu^\Gamma (\delta \Gamma^\lambda_{\nu\rho}) - \nabla_\nu^\Gamma (\delta \Gamma^\lambda_{\mu\rho}). \quad (1.43)$$

Por lo tanto, la variación del tensor de Ricci está dada por

$$\delta R_{\mu\nu}(\Gamma) = \delta_\lambda^\rho \delta R^\lambda_{\mu\rho\nu}(\Gamma) = \delta_\lambda^\rho \left[\nabla_\rho^\Gamma (\delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu}) - \nabla_\nu^\Gamma (\delta\Gamma^\lambda_{\rho\mu}) \right]. \quad (1.44)$$

Realizando una integración por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{EH} &= \left(R_{\mu\nu}(\Gamma) - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} R_{\lambda\rho}(\Gamma) g_{\mu\nu} \right) g^{1/2} \delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - \nabla_\rho^\Gamma \left(g^{\mu\nu} g^{1/2} \delta_\lambda^\rho \right) \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} + \nabla_\nu^\Gamma \left(g^{\mu\nu} g^{1/2} \delta_\lambda^\rho \right) \delta\Gamma^\lambda_{\rho\mu}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Los coeficientes que acompañan a $\delta\Gamma$ deben ser cero. Esta condición es equivalente a $\nabla^\Gamma \mathbf{g} = 0$, y de aquí se obtiene que la conexión es el símbolo de Cristoffel del tensor métrico \mathbf{g} . Finalmente, se obtiene las ecuaciones de Einstein.

Acoplamiento con otros Campos. El acoplamiento de la gravitación con otros campos se describe a través del Lagrangiano

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{EH}(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}, \partial^2\mathbf{g}) + \mathcal{L}_{matter}(\mathbf{g}, \phi). \quad (1.46)$$

En este esquema no existe un Lagrangiano de interacción dado que la materia y la gravitación se acoplan en el Lagrangiano de materia. Ahora las ecuaciones de campo son

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de momento-energía de la materia.

La derivada covariante del lado izquierdo de la ecuación (1.47) es cero y esto da origen a las leyes de conservación para el tensor de momento-energía. No obstante, en varias situaciones estas leyes de conservación resultan ser no-covariantes.

Separación 1+3 de las Ecuaciones de Einstein. Las ecuaciones de Einstein se pueden reescribir como

$$R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) = \kappa \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right]. \quad (1.48)$$

A partir de esta forma de las ecuaciones de Einstein debería ser posible despejar las segundas derivadas temporales de las componentes del tensor métrico. Para esto evaluemos el tensor de Ricci evidenciando las segundas derivadas. Se tiene

$$\begin{aligned} R_{00}(\mathbf{g}) &= g^{\mu\nu} R_{0\mu 0\nu}(\mathbf{g}) = g^{k\ell} R_{0k0\ell}(\mathbf{g}) \\ &= \frac{1}{2} g^{k\ell} (\partial_{00} g_{k\ell} + \partial_{k\ell} g_{00} - \partial_{0k} g_{0\ell} - \partial_{0\ell} g_{0k}) + F(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}) \\ &= \frac{1}{2} g^{k\ell} \partial_{00} g_{k\ell} + F_{00}(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}, \partial_{0i}\mathbf{g}, \partial_{ij}\mathbf{g}). \end{aligned} \quad (1.49a)$$

En forma similar podemos evaluar las otras componentes del tensor de Ricci. Se obtiene

$$\begin{aligned} R_{0i}(\mathbf{g}) &= g^{\mu\nu} R_{0\mu i\nu}(\mathbf{g}) = g^{k0} R_{0ki0}(\mathbf{g}) + g^{k\ell} R_{0kil}(\mathbf{g}) \\ &= -\frac{1}{2} g^{k0} \partial_{00} g_{ki} + F_{0i}(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}, \partial_{0i}\mathbf{g}, \partial_{ij}\mathbf{g}), \end{aligned} \quad (1.49b)$$

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{g}) &= g^{\mu\nu} R_{i\mu j\nu}(\mathbf{g}) \\ &= g^{00} R_{0i0j}(\mathbf{g}) + g^{0k} R_{0ikj}(\mathbf{g}) + g^{k0} R_{ki0j}(\mathbf{g}) + g^{k\ell} R_{kij\ell}(\mathbf{g}) \\ &= \frac{1}{2} g^{00} \partial_{00} g_{ij} + F_{ij}(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}, \partial_{0i}\mathbf{g}, \partial_{ij}\mathbf{g}). \end{aligned} \quad (1.49c)$$

En ninguna de las expresiones anteriores aparecen segundas derivadas temporales de las componentes g_{00} y g_{0i} .

El resultado anterior se puede interpretar de la siguiente manera. Las componentes g_{00} y g_{0i} del tensor métrico no son relevantes para la dinámica. Si estas componentes del tensor métrico no son relevantes, entonces estas se pueden eliminar o ignorar. Por lo tanto, el número de componentes del tensor métrico realmente relevantes para la dinámica son las seis componentes g_{ij} . Es decir, nuestro sistema tiene sólo seis grados de libertad. De hecho, cuando se busca una solución de las ecuaciones de Einstein lo primero que se hace es elegir un sistema de coordenadas. Esta elección del sistema de coordenadas fija cuatro de las componentes del tensor métrico, con lo cual quedan los seis grados de libertad anteriores.

Un problema interesante que surge de lo anterior es encontrar una parametrización del tensor métrico en términos de un nuevo conjunto de campos de manera tal que el Lagrangiano dependa sólo del número de

campos dinámicos (seis) sin necesidad de una elección de coordenadas. Este es el propósito de la parametrización ADM que estudiaremos en el capítulo 6.

Antes, es necesario observar que $\partial_{00}g_{ij}$ se puede despejar de la ecuación (1.49c) y entonces reemplazar en (1.49a) y (1.49b). Entonces se obtienen relaciones de la forma

$$F_\mu(\mathbf{g}, \partial\mathbf{g}, \partial_{0i}\mathbf{g}, \partial_{ij}\mathbf{g}) = 0. \quad (1.50)$$

Dado que en formalismo Hamiltoniano de la teoría de campos se debe integrar sobre las coordenadas espaciales, lo que finalmente importa son las derivadas temporales. Entonces es posible escribir las relaciones anteriores como

$$F_\mu(\mathbf{g}, \partial_0\mathbf{g}) = 0. \quad (1.51)$$

Por lo tanto es necesario entender las teorías en las cuales aparecen relaciones de la forma (1.51).

Referencias 1

- 1.01. I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (Streater, London, 1687).
- 1.02. A. Einstein, *Zur elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. (Leipzig) **17**, 891 (1905).
- 1.03. A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Preuss. Akad. Wiss. Sitz. 1915, 799 (1915).
- 1.04. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik (Erste Mitteilung)*, Nach. Gess. Wiss. Göttingen **1916**, 395 (1916).
- 1.05. K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl., 189 (1916).
- 1.06. A. Palatini, *Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di hamilton*, Rend. Circ. Mat. Palermo **43**, 203 (1919).
- 1.07. N. Strauman, *General Relativity and Relativistic Astrophysics* (Springer, Berlin, 1984).
- 1.08. R. Hulse and J. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*, Astrophys. J. **195**, L51 (1975).

2. Sistemas con Vínculos. I

Los sistemas con vínculos son aquellos para los cuales la matriz Hessiana es singular. A nivel Lagrangiano esto significa que no es posible despejar todas las aceleraciones a partir de las ecuaciones de Euler–Lagrange y que existen relaciones adicionales entre las coordenadas y las velocidades. Estas relaciones son los vínculos. Debido a la imposibilidad de determinar todas las velocidades, aparecen funciones arbitrarias en la solución de las ecuaciones de Euler–Lagrange, aun cuando la situación física que describen es la misma.

A nivel Hamiltoniano, la transformada de Legendre no se puede invertir para expresar las velocidades en término de los momentos, por lo tanto, no se puede usar el método habitual para ir desde el formalismo Lagrangiano al formalismo Hamiltoniano. También aquí aparecen funciones arbitrarias en la solución.

La aparición de funciones arbitrarias es familiar en las teorías de *gauge*. De hecho, todas las teorías de *gauge* son sistemas con vínculos. De hecho, los requisitos de covariancia general inevitablemente llevan a modelos matemáticos que corresponden a sistemas con vínculos. Sin embargo, muchas de sus propiedades más importantes se pueden ya exhibir a nivel de mecánica clásica. De este modo evitamos las sutilezas de la teoría de campos. En el caso de un número infinito de grados de libertad (teoría de campos) el paréntesis de Poisson admite una generalización adecuada, véase el Apéndice D, y todo lo que se tiene que hacer es el reemplazo y relectura correspondiente. De hecho, los sistemas con vínculos son una herramienta importante en el estudio de las teorías de *gauge* y de hecho son un ingrediente esencial en la justificación de la representación de Faddeev–Popov de la integral de trayectoria en mecánica cuántica. En las teorías de *gauge* la estructura de los vínculos está dictada por el grupo de *gauge* correspondiente.

El estudio de los sistemas con vínculos intenta determinar cómo el formalismo Lagrangiano se puede colocar en forma Hamiltoniana y qué tanto del formalismo Hamiltoniano se puede mantener para sistemas con vínculos. En otras palabras se intenta desarrollar un método estándar que permita *hamiltonianizar* un Lagrangiano singular. La segunda motivación es, una vez obtenida una descripción Hamiltoniana de los sistemas con vínculos, desarrollar la correspondiente mecánica cuántica.

Concentraremos nuestros esfuerzos en exhibir la estructura general de los sistemas con vínculos y su relación con las teorías de *gauge*. En nuestra discusión supondremos que varias manipulaciones algebraicas se

pueden realizar sin obstrucciones. Por ejemplo, reescribiremos algunas ecuaciones de alguna manera especial, pero equivalente, que muestre algunas de las variables como funciones explícitas de las otras.

Finalmente, el esquema general para tratar con sistemas con vínculos también se puede aplicar a un conjunto de ecuaciones de Euler–Lagrange junto con un conjunto de vínculos externos, es decir, que no se siguen directamente del principio variacional sino que se imponen en forma externa.

La primera discusión sistemática de los sistemas con vínculos fue dada por Dirac (1950, 1958) la cual culminó en una monografía (Dirac, 1964). La presentación en esa monografía es insuperable en cuanto a claridad y profundidad conceptual por lo cual recomendamos su lectura. Tratamientos sistemáticos más recientes se pueden encontrar en (Sudarshan and Mukunda, 1974; Hanson, Regge and Teitelboim, 1976; Sundermeyer, 1981).

Descripción de los Vínculos. En la formulación variacional de la mecánica clásica se supone que las ecuaciones de Euler–Lagrange se pueden integrar sin ninguna dificultad. Sin embargo, esto se puede hacer sólo si es posible despejar las aceleraciones (segundas derivadas). Para determinar las condiciones para que ésto sea posible reescribamos las ecuaciones de Euler–Lagrange como

$$W_{ij} \ddot{q}^j = \alpha_i, \quad (2.01)$$

donde

$$W_{ij}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad (2.02)$$

es la matriz Hessiana y

$$\alpha_i(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}. \quad (2.03)$$

Por lo tanto, la condición necesaria para poder integrar las ecuaciones de Euler–Lagrange (2.01) con respecto al tiempo es poder despejar las aceleraciones, y para esto es necesario que la matriz Hessiana sea regular, es decir,

$$W = \det(W_{ij}) \neq 0, \quad (2.04)$$

lo cual corresponde al caso usual de la mecánica clásica.

Habiendo integrado las ecuaciones (2.01) la solución queda completamente determinada al dar $I = 2N$ valores iniciales, por ejemplo, los valores (q_0^i, \dot{q}_0^i) de (q^i, \dot{q}^i) en un instante dado t_0 . El número de grados de libertad f del sistema se define como $f = I/2 = N$.

Los sistemas, o Lagrangianos, singulares aparecen cuando ocurre que

$$W = \det(W_{ij}) = 0. \quad (2.05)$$

En este caso no es posible despejar, a partir de las ecuaciones de Euler–Lagrange, todas las aceleraciones en término de las coordenadas y de las velocidades y por lo tanto es imposible integrar estas ecuaciones. Dado que W_{ij} es singular se tiene que

$$0 \leq \text{rango}(W_{ij}) = M < N. \quad (2.06)$$

En consecuencia, existen $K = N - M$ auto–vectores nulos $v_a^i(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$, $a = 1, \dots, K$, linealmente independientes, de la matriz Hessiana

$$W_{ij} v_a^j = 0. \quad (2.07)$$

Contrayendo las ecuaciones de Euler–Lagrange (2.01) con los auto–vectores nulos v_a^i se obtiene

$$\alpha_i v_a^i = 0. \quad (2.08)$$

Por lo tanto, existen K funciones $\phi_a = \alpha_i v_a^i$ tal que

$$\phi_a(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) = 0. \quad (2.09)$$

Estas relaciones son de la forma (1.51). Por lo tanto, para entender la estructura variacional de la Relatividad General es necesario estudiar las teorías para las cuales $W = 0$.

Las funciones (2.09) son los vínculos. Por lo tanto, los datos iniciales deben satisfacer un número, K , de relaciones de la forma (2.09). Entonces, no todos los $2N$ datos iniciales se pueden dar en forma independiente dado que estos deben satisfacer los vínculos y por lo tanto el número de grados de libertad es menor que N .

Los vínculos (2.09) son una consecuencia de las ecuaciones de movimiento y representan vínculos en el sentido de que imponen restricciones sobre la manera en que se pueden elegir los datos iniciales.

No profundizaremos más en las propiedades de los vínculos desde el punto de vista Lagrangiano dado que estos encuentran una formulación

matemática más adecuada en el formalismo Hamiltoniano, al cual nos referimos a continuación. Los aspectos Lagrangianos de los vínculos están estudiados en detalle en (Sudarshan and Mukunda, 1976).

Vínculos Hamiltonianos. Para ir desde el formalismo Lagrangiano al formalismo Hamiltoniano es necesario expresar las velocidades en términos de \vec{q} 's y \vec{p} 's. Para determinar las condiciones bajo las cuales ésto es posible consideremos el diferencial de los \vec{p} 's; se tiene

$$dp_i = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^j + W_{ij} d\dot{q}^j. \quad (2.10)$$

La condición para despejar las velocidades en términos de \vec{q} 's y \vec{p} 's es poder escribir una expresión del tipo $d\vec{q} = \alpha d\vec{q} + \beta d\vec{p}$ (Teorema de la Función Implícita). Para esto es necesario que la matriz Hessiana sea invertible y por lo tanto que su determinante sea distinto de cero. Si $W = 0$, el cual es el caso para los sistemas con vínculos, entonces no es posible despejar las velocidades y una contracción de la ecuación (2.10) con los auto-vectores nulos v_a^i de la matriz Hessiana nos lleva a

$$v_a^i dp_i = v_a^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} dq^j. \quad (2.11)$$

La relación anterior significa que los \vec{q} 's y los \vec{p} 's no se pueden variar en forma independiente. Estas relaciones diferenciales se pueden llevar a relaciones funcionales si es posible encontrar una función integrante f tal que

$$\begin{aligned} f v_a^i &= \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}, \\ f v_a^i \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} &= \frac{\partial \phi_a}{\partial q^j}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

En lo que sigue supondremos que existe esta función integrante (esta es una de las operaciones de las cuales habíamos anunciado que supondríamos su factibilidad). Entonces, existen K relaciones de la forma

$$\phi_a(\vec{q}, \vec{p}) = 0. \quad (2.13)$$

Los vínculos (2.13) se denominan primarios para enfatizar el hecho que son una característica intrínseca del Lagrangiano y que para

su obtención no es necesario utilizar las ecuaciones de movimiento. Los vínculos (2.13) restringen la dinámica del sistema a un sub-espacio Σ de dimensión $(2N - K)$ del espacio de fase, originalmente de dimensión $2N$.

El Hamiltoniano canónico está definido como en (C.45) y depende sólo de las variables \vec{q} y \vec{p} . Esto significa que las velocidades que no se pueden despejar no aparecen en H_c , o que aparecen siempre en una combinación que no hace necesario conocerlas explícitamente.

Sin embargo, las ecuaciones de Hamilton (C.51) ya no son equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange originales; la condición para la equivalencia es justamente $W \neq 0$. Esto es debido al hecho que la información concerniente a la existencia de vínculos no está contenida ni en el Hamiltoniano ni en el paréntesis de Poisson. Por lo tanto, para obtener ecuaciones Hamiltonianas equivalentes a las ecuaciones de Euler-Lagrange se debe elaborar un mecanismo para incorporar la información para incorporar los vínculos. Esto se puede hacer o modificando el Hamiltoniano o modificando el paréntesis de Poisson (o ambos).

El método de Dirac. La acción está dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H_c) dt. \quad (2.14)$$

El principio de mínima acción establece que $\delta S = 0$. Pero esta variación está sujeta a las condiciones adicionales (2.13). Los problemas variationales sujetos a vínculos se pueden tratar a través del uso de multiplicadores de Lagrange. Para esto basta considerar una acción en un espacio de fase extendido $(\vec{p}, \vec{q}, \vec{\lambda}, \vec{\pi})$ dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H_c - \lambda^a \phi_a) dt, \quad (2.15)$$

donde los $\vec{\lambda}$'s son multiplicadores de Lagrange, los cuales se consideran como variables independientes y por lo tanto se varían en forma independiente de los \vec{q} 's y \vec{p} 's; los $\vec{\pi}$'s son los momentos canónicamente conjugados a los $\vec{\lambda}$'s.

Si se define el Hamiltoniano primario H_1 como

$$H_1 = H_c + \lambda^a \phi_a, \quad (2.16)$$

entonces es posible reescribir (2.15) como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H_1) dt. \quad (2.17)$$

La variación de (2.15) se obtiene considerando variaciones independientes de \vec{q} 's, \vec{p} 's y $\vec{\lambda}$'s. El resultado es

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H_c}{\partial p_i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \right) \delta q^i - \phi_a \delta \lambda^a \right] dt = 0, \quad (2.18)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir de este principio variacional son

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H_c}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

y

$$\phi_a = 0. \quad (2.20)$$

Estas nuevas ecuaciones de Hamilton son equivalentes a las ecuaciones de Euler–Lagrange y además son compatibles con los vínculos.

Ahora, la derivada temporal de una función genérica $F = F(\vec{q}, \vec{p})$ está dada por

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^i} \left(\frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \right) - \frac{\partial F}{\partial p_i} \left(\frac{\partial H_c}{\partial q^i} + \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \right) \\ &= \{F, H_c\} + \lambda^a \{F, \phi_a\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Las ecuaciones de Hamilton contienen funciones desconocidas $\vec{\lambda}$. Sin embargo, también debemos recordar que estamos tratando con un sistema con vínculos, lo cual significa que no todas las coordenadas

canónicas son independientes y que por lo tanto las ecuaciones de Hamilton (2.21) tampoco lo son. La situación final debería ser que las coordenadas realmente independientes no dependan de estas funciones arbitrarias. El propósito del formalismo desarrollado por Dirac es justamente determinar este sub-conjunto de variables independientes que no contienen funciones arbitrarias.

Igualdades fuertes y débiles. Las ecuaciones de Hamilton dependen de las derivadas de los vínculos. Por lo tanto, a pesar de que la dinámica tiene lugar sobre la superficie Σ definida por los vínculos, esta dinámica recibe contribuciones de la vecindad de Σ . Por lo tanto, sería incorrecto colocar los vínculos iguales a cero desde un principio dado que se perdería esta información. Para tratar con esta situación es útil introducir las nociones de igualdades fuertes y débiles. Los vínculos se anulan sobre Σ pero no en su vecindad. Este hecho se expresa escribiendo

$$\phi_a \approx 0, \quad (2.22)$$

donde “ \approx ” es el símbolo de igualdad débil, el cual es diferente del símbolo de igualdad fuerte “=” válido sobre Σ . De esta manera podría ocurrir que los vínculos puedan tener paréntesis de Poisson no-nulos con las variables canónicas (dado que estos involucran derivadas). Ahora, por lo tanto, todas las cantidades dinámicas se deben definir en la vecindad de Σ , es decir, en forma débil.

Sea $F(\vec{q}, \vec{p})$ una función en el espacio de fase definida en una vecindad del subespacio Σ . Si la restricción de $F(\vec{q}, \vec{p})$ a Σ se anula, entonces se dice que F es débilmente igual a cero, y se escribe

$$F(\vec{q}, \vec{p}) \approx 0, \quad (2.23)$$

lo cual es equivalente a

$$F(\vec{q}, \vec{p})|_{\Sigma} = 0. \quad (2.24)$$

Si la función F y todas sus derivadas se anulan en Σ , entonces F es fuertemente igual a cero

$$F(\vec{q}, \vec{p}) = 0, \quad (2.25)$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{aligned}
F(\vec{q}, \vec{p})|_{\Sigma} &= 0, \\
\left. \frac{\partial F}{\partial q^i} \right|_{\Sigma} &= 0, \\
\left. \frac{\partial F}{\partial p_i} \right|_{\Sigma} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

etc.

Es interesante aclarar la relación entre igualdades fuertes y débiles. Sea F una función del espacio de fase que se anula débilmente, $F \approx 0$. Variando F en Σ se encuentra que

$$\delta F|_{\Sigma} = \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \delta p_i \right) \Big|_{\Sigma} = 0. \tag{2.27}$$

Aquí se debe tener en cuenta que las $2N$ variaciones $\delta \vec{q}$ y $\delta \vec{p}$ no son independientes sino que satisfacen los K vínculos

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} \delta p_i \approx 0. \tag{2.28}$$

Usando el método general del cálculo de variaciones con vínculos, el problema variacional anterior lleva a las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial q^i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial q^i} &= 0, \\
\frac{\partial F}{\partial p_i} - \lambda^a \frac{\partial \phi_a}{\partial p_i} &= 0,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

donde $\bar{\lambda}$ son algunos multiplicadores. Estas $2N$ ecuaciones, junto con (2.22), determinan las condiciones satisfechas por $(\partial F/\partial \vec{q})$, $(\partial F/\partial \vec{p})$ y $\bar{\lambda}$ en Σ . Estas ecuaciones implican las relaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial q^i} (F - \lambda^a \phi_a) &\approx 0, \\
\frac{\partial}{\partial p_i} (F - \lambda^a \phi_a) &\approx 0,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

a partir de lo cual se deduce que

$$F - \lambda^a \phi_a = \mathcal{O}, \tag{2.31}$$

donde \mathcal{O} es una cantidad con derivadas débilmente nulas: puede ser cero, una constante o una potencia de los vínculos. Para teorías en las cuales los vínculos satisfacen esta condición de regularidad se puede demostrar que $\mathcal{O} = 0$. En otras palabras si $F \approx 0$, entonces

$$F = \lambda^a \phi_a. \tag{2.32}$$

Funciones primarias. Cualquier función definida sobre Σ se puede extender en forma arbitraria fuera de Σ utilizando los vínculos. Por ejemplo, el Hamiltoniano canónico no está determinado en forma única en todo el espacio de fase dado que se le puede sumar cualquier combinación lineal de los vínculos, que es cero sobre Σ . Por lo tanto, el Hamiltoniano canónico está bien definido sólo sobre el sub-espacio Σ definido por los vínculos y se puede extender en forma arbitraria fuera de este sub-espacio. Por lo tanto, las predicciones de la teoría no deberían cambiar si el Hamiltoniano canónico se reemplaza por el Hamiltoniano primario (2.16).

Dado que los vínculos poseen paréntesis de Poisson no-nulos con las variables canónicas, las igualdades débiles llegan a ser igualdades fuertes sólo después que se han evaluado los paréntesis de Poisson, es decir, sólo cuando se han escrito en forma explícita las ecuaciones de movimiento.

Debido al resultado anterior, las ecuaciones de Hamilton (2.21) también se pueden obtener si utilizamos el Hamiltoniano primario y el paréntesis de Poisson para evaluar la derivada temporal de F . Se tiene

$$\dot{F} = \{F, H_1\} = \{F, H_c\} + \lambda^a \{F, \phi_a\} + \{F, \lambda^a\} \phi_a. \tag{2.34}$$

Las ecuaciones de Hamilton (2.21) se recuperan al colocar los vínculos iguales a cero. Por lo tanto, no es necesario calcular el paréntesis de Poisson que involucra a los λ 's dado que estos están multiplicados por algo que será cero al final del cálculo.

Esta argumentación se puede formalizar como una regla si evaluamos todas las cantidades que aparezcan en los desarrollos y colocamos los vínculos iguales a cero sólo al final del cálculo. Sin embargo, podemos ignorar aquellos términos de los cuales estamos seguros que quedarán multiplicados por alguna cantidad, por ejemplo los vínculos, que serán iguales a cero al final del cálculo.

De acuerdo con esta regla todas las cantidades de interés se deberían definir en la vecindad de Σ , es decir, en forma débil. Por ejemplo, la ecuación (2.21) se debería escribir como en (2.34).

Dos funciones F_1 y F_2 que coinciden sobre Σ son débilmente iguales, $F_1 \approx F_2$. Esto es debido al hecho que dos funciones que coinciden sobre Σ pueden diferir fuera de Σ y esto se expresa a través de una combinación lineal de los vínculos

$$F_1 \approx F_2 \Leftrightarrow F_1 - F_2 = f^a \phi_a. \quad (2.35)$$

Si dos funciones F_1 y F_2 no coinciden sobre Σ estas son débilmente diferentes, pero en este caso también son fuertemente diferentes

$$F_1 \not\approx F_2 \Leftrightarrow F_1 - F_2 \neq f^a \phi_a. \quad (2.36)$$

Funciones de primera y de segunda clase. Una función $F(\vec{q}, \vec{p})$ en el espacio de fase es de primera clase si tiene paréntesis de Poisson débilmente cero con todos los vínculos de la teoría, es decir,

$$\{F, \phi_a\} \approx 0. \quad (2.37)$$

Si F no es de primera clase, entonces es de segunda clase. Obviamente, las funciones de segunda clase son ambiguas módulo una combinación lineal de funciones de primera clase.

La propiedad de ser de primera clase o de segunda clase es esencial para la interpretación de los vínculos.

Toda cantidad que se anula débilmente es una cantidad que es fuertemente igual a una combinación lineal de los vínculos. Por lo tanto, si F es una función de primera clase, entonces satisface la igualdad fuerte

$$\{F, \phi_a\} = f_a^b \phi_b. \quad (2.38)$$

Una característica importante de las funciones de primera clase es que esta propiedad se preserva bajo la operación de paréntesis de Poisson.

Teorema. *El paréntesis de Poisson de dos funciones de primera clase es una función de primera clase.*

Demostración. Si F y G son funciones de primera clase entonces, además de (2.38) se tiene una relación similar para G , a saber,

$$\{G, \phi_a\} = g_a^b \phi_b. \quad (2.39)$$

Entonces el paréntesis de Poisson de $\{F, G\}$ con los vínculos está dado por

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_a\} &= \{F, \{G, \phi_a\}\} - \{G, \{F, \phi_a\}\} \\ &= \{F, g_a^b \phi_b\} - \{G, f_a^b \phi_b\} \\ &= \{F, g_a^b\} \phi_b - \{G, f_a^b\} \phi_b \\ &\quad + g_a^b \{F, \phi_b\} - f_a^b \{G, \phi_b\} \\ &= [\{F, g_a^b\} - \{G, f_a^b\} + g_a^c f_c^b - f_a^c g_c^b] \phi_b \\ &= H_a^b \phi_b, \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde hemos usado reiteradamente la identidad de Jacobi.

Vínculos de primera y de segunda clase. La clasificación de los vínculos que vamos a introducir a continuación se basa en el hecho que cualquier combinación lineal de los vínculos es nuevamente un vínculo; definen la misma superficie Σ . Por lo tanto, los vínculos se pueden reemplazar por combinaciones lineales de ellos mismos y serán indistinguibles de los originales dado que definirán la misma superficie Σ .

Esta libertad en la elección de los vínculos se puede utilizar como sigue. Empecemos por considerar la matriz construida con los paréntesis de Poisson de los vínculos, $\{\phi_a, \phi_b\}$. Entonces se tiene que

$$0 \leq \text{rango}(\{\phi_a, \phi_b\}) \leq K. \quad (2.41)$$

Por otra parte, $\{\phi_a, \phi_b\}$ es una matriz anti-simétrica y, debido al Teorema de Pfaff, su rango es un número par

$$\text{rango}(\{\phi_a, \phi_b\}) = 2J. \quad (2.42)$$

A continuación se pueden elegir nuevos vínculos, combinaciones lineales de los originales, de modo tal de diagonalizar por bloques la matriz $\{\phi_a, \phi_b\}$. Escribamos

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &= \Lambda_\alpha^a \phi_a, & \alpha &= 1, \dots, 2J, \\ \gamma_\mu &= \Lambda_\mu^a \phi_a, & \mu &= 1, \dots, R = K - 2J, \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde $\Lambda_{K \times K}$ es una matriz no-singular, de modo tal que

$$\begin{aligned} \det(\{\chi_\alpha, \chi_\beta\}) &\neq 0, \\ \{\chi_\alpha, \gamma_\mu\} &\approx 0, \\ \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Por lo tanto se puede escribir

$$\{\phi, \phi\} = \begin{pmatrix} \{\chi, \chi\}_{2J \times 2J} & 0_{2J \times R} \\ 0_{R \times 2J} & 0_{R \times R} \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

El resultado anterior es la clasificación de los vínculos en primera clase, γ_μ , y segunda clase, χ_α .

Ahora el Hamiltoniano primario se puede escribir como

$$H_1 = H_c + u^\alpha \chi_\alpha + v^\mu \gamma_\mu, \quad (2.46)$$

y la evolución temporal de una función genérica F ahora está dada por

$$\dot{F} = \{F, H_1\} \approx \{F, H_c\} + u^\alpha \{F, \chi_\alpha\} + v^\mu \{F, \gamma_\mu\}. \quad (2.47)$$

Condiciones de consistencia. La evolución de las variables canónicas del espacio de fase todavía contiene funciones arbitrarias. Algunas de estas funciones arbitrarias se pueden hacer explícitas a través de las condiciones de consistencia que ahora vamos a desarrollar.

La dinámica del sistema debe tener lugar sólo sobre Σ . Sin embargo, tal como está escrita la dinámica en (2.47), con contribuciones de la vecindad, es posible que el sistema no permanezca en Σ . Es decir, el sistema es no-holónómico. Esto significa que el sistema se puede mover fuera de Σ y que por lo tanto los vínculos, que definen Σ , han cambiado. Para que este cambio no ocurra es necesario exigir que los vínculos permanezcan constantes, es decir, que sus derivadas temporales sean (débilmente) cero, es decir,

$$\dot{\chi}_\alpha \approx \{\chi_\alpha, H_c\} + u^\beta \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \approx 0, \quad (2.48a)$$

$$\dot{\gamma}_\mu \approx \{\gamma_\mu, H_c\} \approx 0. \quad (2.48b)$$

Las ecuaciones (2.48a) permiten determinar los $2J$ multiplicadores de Lagrange u^α , pero los R multiplicadores v^μ están indeterminados.

Significado de los vínculos de primera clase. La presencia de multiplicadores arbitrarios en las ecuaciones de movimiento (y sus soluciones) significa que las variables $(\vec{q}(t), \vec{p}(t))$ no se pueden determinar en forma única a partir de los valores iniciales $(\vec{q}(0), \vec{p}(0))$; por lo tanto, no tienen un significado físico. La información física acerca de un sistema se puede obtener a partir de funciones $A(\vec{q}, \vec{p})$, definidas sobre la superficie de vínculos, que son independientes de multiplicadores arbitrarios; tales funciones son las cantidades *observables* del sistema. El estado físico de un sistema está determinado por el conjunto completo de cantidades observables del sistema en ese instante.

Para fijar las ideas consideremos un sistema con sólo vínculos de primera clase, y consideremos una variable dinámica general $g(t)$ en $t = 0$ y su cambio después de un intervalo pequeño de tiempo δt . El valor inicial de $g(0)$ está determinando por $(\vec{q}(0), \vec{p}(0))$. El valor de $g(t)$ en el instante δt se puede calcular a partir de las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} g(\delta t) &= g(0) + \dot{g} \delta t = g(0) + \{g, H_1\} \delta t \\ &= g(0) + [\{g, H_c\} + v^\mu \{g, \gamma_\mu\}] \delta t. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Dado que los coeficientes v^μ son completamente arbitrarios, es posible elegir diferentes valores para estos coeficientes y obtener valores diferentes para $g(\delta t)$. La diferencia es de la forma

$$\Delta g(\delta t) = \{g, \gamma_\mu\} \epsilon^\mu. \quad (2.50)$$

donde $\epsilon^\mu = (v_{(1)}^\mu - v_{(2)}^\mu) \delta t$. Dado que $g_{(1)}(\delta t)$ y $g_{(2)}(\delta t) + \Delta g(\delta t)$ corresponden al mismo estado físico, el cambio en $g(\delta t)$ no es físico. Entonces llegamos a la conclusión de que los vínculos (primarios) de primera clase generan transformaciones no-físicas de las variables dinámicas, las cuales se conocen como transformaciones de gauge.

La aplicación sucesiva de dos transformaciones del tipo (2.50), con parámetros $\epsilon_{(1)}^\mu$ y $\epsilon_{(2)}^\mu$ da un resultado que depende del orden de las transformaciones. La diferencia en los dos posibles resultados es

$$\begin{aligned} (\Delta_{(1)} \Delta_{(2)} - \Delta_{(2)} \Delta_{(1)}) g(\delta t) &= \epsilon_{(1)}^\mu \epsilon_{(2)}^\nu [\{g, \gamma_\nu, \gamma_\mu\} - \{g, \gamma_\mu, \gamma_\nu\}] \\ &= \epsilon_{(1)}^\mu \epsilon_{(2)}^\nu \{g, \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}\}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde la última igualdad se obtiene utilizando la identidad de Jacobi. Pero el paréntesis de Poisson de dos vínculos de primera clase es fuertemente igual a una combinación lineal de vínculos de primera clase, es decir,

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = C_{\mu\nu}{}^\lambda \gamma_\lambda. \quad (2.52)$$

Este resultado nos lleva a concluir que la cantidad $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}$ es también el generador de una transformación no-física.

Los C 's son las constantes de estructura del grupo de simetría de *gauge*, y los γ 's son los generadores de las simetrías de *gauge*.

Referencias 2

- 2.01. P. A. M. Dirac, *Generalized Hamiltonian dynamics*, Canadian J. Math. **2**, 129 (1950).
- 2.02. P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964).
- 2.03. L. D. Faddeev and V. N. Popov, *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. B **25**, 29 (1967).
- 2.04. K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lect. Notes. Phys. **169** (Springer, Berlin, 1982).
- 2.05. E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective* (Wiley, New York, 1974).
- 2.06. A. Hanson, T. Regge and D. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems* (Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1976).

3. Sistemas con Vínculos. II

La conjetura de Dirac. Con respecto a las ecuaciones (2.50b) no está garantizado que estas serán satisfechas, ni siquiera débilmente. Por lo tanto la situación es que algunas relaciones (2.50b) serán débilmente satisfechas mientras que otras pueden llevar a imponer nuevas relaciones entre las coordenadas canónicas. Supongamos que las relaciones (2.50b) imponen R_2 , $0 \leq R_2 \leq R$, nuevas relaciones entre los \vec{q} 's y \vec{p} 's de la forma

$$\phi_{a_2}^{(2)}(\vec{q}, \vec{p}) \approx 0, \quad (3.01)$$

donde $a_2 = 1, \dots, R_2$. Estas nuevas relaciones son los *vínculos secundarios*, los cuales se han obtenido usando las ecuaciones de movimiento.

Dirac conjeturó que los vínculos secundarios se deben tratar de la misma manera que los vínculos primarios. Por lo tanto, la situación es la misma que antes de imponer las condiciones de consistencia. Existe un Hamiltoniano canónico H_c y un conjunto de vínculos, primarios y secundarios. Ahora se repite el procedimiento anterior de separar los vínculos en primera y segunda clase y se aplican nuevamente las condiciones de consistencia. Es posible que nuevamente aparezcan otros vínculos y el procedimiento se debe repetir hasta llegar a una situación en la cual todas las condiciones de consistencia se satisfacen en forma automática. Finalmente, se termina con un conjunto de R' vínculos de primera clase $\bar{\gamma}_\mu$, y $2J'$ vínculos de segunda clase $\bar{\chi}_\alpha$. Ahora todos los vínculos, primarios, secundarios o de una generación posterior, aparecen al mismo nivel. Lo que ahora es realmente importante, en este enfoque no es tanto si los vínculos son primarios o secundarios, sino más bien si son de primera o de segunda clase.

Después de haber impuesto las condiciones de consistencia se termina con un conjunto de vínculos de primera clase el cual, en general, es mayor que el conjunto original de vínculos de primera clase. Los vínculos primarios de primera clase corresponden a invariancias de *gauge* de la teoría. Sin embargo, *a priori*, lo mismo no se puede decir de los vínculos secundarios de primera clase. Por otra parte, el paréntesis de Poisson de dos vínculos de primera clase es nuevamente un vínculo de primera clase, ecuación (2.52). Podría bien suceder que este nuevo vínculo de primera clase sea secundario y por lo tanto también un generador de transformaciones de *gauge*. Por lo tanto, los vínculos secundarios de primera clase también deberían ser generadores de transformaciones no-físicas.

Dirac creía que la interpretación anterior era correcta, pero fue incapaz de demostrarla. Frente a esta situación Dirac conjeturó lo siguiente.

Conjetura de Dirac. *Todos los vínculos de primera clase, primarios y secundarios, son generadores de transformaciones de gauge.*

Hasta la actualidad no ha sido posible demostrar esta conjetura y la situación es realmente poco clara dado que existen ejemplos tanto en favor como en contra.

La conjetura de Dirac es consistente en los siguientes aspectos:

1. Las transformaciones generadas por vínculos de primera clase preserva todos los vínculos, tanto de primera como de segunda clase, y por lo tanto mapea estados permitidos en estados permitidos.
2. El paréntesis de Poisson de dos generadores de transformaciones de *gauge* también es una transformación de *gauge*.

Finalmente, considerando todos los vínculos de primera clase como generadores de transformaciones de *gauge* podemos estar seguros de que el sistema tendrá un número par de variables canónicas, donde cada par está asociado con un grado de libertad físico.

El resultado anterior sugiere que las ecuaciones de movimiento se pueden generalizar para permitir no sólo las variaciones dadas por los vínculos de primera clase primarios sino que también por los secundarios.

Finalmente, la conjetura es respaldada por el hecho que aun cuando uno comience con un conjunto menor de vínculos inevitablemente aparecerán vínculos secundarios como una consecuencia de las condiciones que fijan el *gauge*.

El Hamiltoniano extendido. La evolución temporal está ahora dada por un Hamiltoniano que contiene todos los vínculos, primarios y secundarios, de primera y de segunda clase, junto con el paréntesis de Poisson. Este Hamiltoniano extendido está dado por

$$H_E = H_c + \bar{u}^{\bar{\alpha}} \bar{\chi}_{\bar{\alpha}} + \bar{v}^{\bar{\mu}} \bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, \quad (3.02)$$

donde ahora $\bar{\alpha} = 1, \dots, 2J'$, y $\bar{\mu} = 1, \dots, R'$. La evolución temporal está dada por

$$\dot{F} = \{F, H_E\} \approx \{F, H_c\} + \bar{u}^{\bar{\alpha}} \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} + \bar{v}^{\bar{\mu}} \{F, \bar{\gamma}_{\bar{\mu}}\}. \quad (3.03)$$

Las condiciones de consistencia son

$$\dot{\bar{\chi}}_{\bar{\alpha}} \approx \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, H_c\} + \bar{u}^{\bar{\beta}} \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, \bar{\chi}_{\bar{\beta}}\} \approx 0, \quad (3.04a)$$

$$\dot{\bar{\gamma}}_{\bar{\mu}} \approx \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, H_c\} \approx 0. \quad (3.04b)$$

Pero ahora, las ecuaciones (3.04b) se satisfacen automáticamente y no dan origen a nuevos vínculos. Con respecto a las ecuaciones (3.04a) introduzcamos la siguiente notación

$$\bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, \bar{\chi}_{\bar{\beta}}\}. \quad (3.05)$$

Dado que esta es una matriz de paréntesis de Poisson de vínculos de segunda clase, por definición es una matriz regular y por lo tanto existe una matriz inversa $\bar{C}^{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ que satisface

$$\bar{C}^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \bar{C}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} = \delta_{\bar{\beta}}^{\bar{\alpha}}. \quad (3.06)$$

Entonces, la ecuación (3.04a) se puede reescribir como

$$\bar{u}^{\bar{\alpha}} \approx -\bar{C}^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} \{\bar{\chi}_{\bar{\beta}}, H_c\}. \quad (3.07)$$

Entonces, la ecuación de evolución (3.03) se puede reescribir como

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} - \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \bar{C}^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} \{\bar{\chi}_{\bar{\beta}}, H_c\} + \bar{v}^{\bar{\mu}} \{F, \bar{\gamma}_{\bar{\mu}}\}. \quad (3.08)$$

Los dos primeros términos están completamente determinados, y por lo tanto se pueden agrupar en una única expresión estandarizada. Definamos

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \bar{C}^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} \{\bar{\chi}_{\bar{\beta}}, G\}. \quad (3.09)$$

Esta expresión es el paréntesis de Dirac. Por lo tanto, podemos reescribir (3.08) como

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}^* + \bar{v}^{\bar{\mu}} \{F, \bar{\gamma}_{\bar{\mu}}\}. \quad (3.10)$$

Aparte del término asociado con los vínculos de primera clase hemos logrado escribir la dinámica de un sistema con vínculos de una manera Hamiltoniana, sólo que esta vez, en vez del paréntesis de Poisson se debe usar el paréntesis de Dirac.

El paréntesis de Dirac. El paréntesis de Dirac posee todas las propiedades del paréntesis de Poisson, a saber:

a. Antisimetría:

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\}^*. \quad (3.11a)$$

b. Linealidad:

$$\{a_1 F_1 + a_2 F_2, G\}^* = a_1 \{F_1, G\}^* + a_2 \{F_2, G\}^*. \quad (3.11b)$$

c. Regla de Leibniz:

$$\{F_1 F_2, G\}^* = \{F_1, G\}^* F_2 + F_1 \{F_2, G\}^*. \quad (3.11c)$$

d. Identidad de Jacobi:

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}^*\}^* + \{F_2, \{F_3, F_1\}^*\}^* + \{F_3, \{F_1, F_2\}^*\}^* \equiv 0. \quad (3.11d)$$

y las siguientes propiedades adicionales:

e. Para G de primera clase y F arbitrario:

$$\{F, G\}^* \approx \{F, G\}. \quad (3.11e)$$

f. Para G_1 y G_2 de primera clase y F arbitrario:

$$\{F, \{G_1, G_2\}^*\}^* \approx \{F, \{G_1, G_2\}\}. \quad (3.11f)$$

Otra propiedad importante del paréntesis de Dirac es su iteratividad. Si el número de vínculos es demasiado grande se puede evitar el trabajo de invertir matrices demasiado grandes si se toma un conjunto más pequeño de vínculos de segunda clase y se evalúa el paréntesis de Dirac para este subconjunto. Iterando este procedimiento hasta colocar todos los vínculos de segunda clase fuertemente iguales a cero da el mismo resultado que evaluar el paréntesis de Dirac en un único paso.

Funciones de primera clase. El paréntesis de Dirac también se puede obtener usando un método constructivo introducido por Hanson,

Regge y Teitelboim (1976). Para cualquier función F es siempre posible construir una nueva función F' que tiene paréntesis de Poisson nulo con todos los vínculos de segunda clase. Definamos

$$F' = F - \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \bar{C}^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} \bar{\chi}_{\bar{\beta}}. \quad (3.12)$$

Entonces, se tiene que

$$\{F', \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \approx 0. \quad (3.13)$$

Se debe observar, sin embargo, que $\{F', \bar{\gamma}_{\bar{\mu}}\}$ no es necesariamente débilmente igual a cero.

A continuación se postula que el paréntesis de Poisson de dos funciones F y G se debe reemplazar por el paréntesis de Poisson de sus contrapartes de primera clase, es decir,

$$\{F, G\} \rightarrow \{F', G'\}, \quad (3.14)$$

Se debe observar que, aun cuando $F' \approx F$ y $G' \approx G$, en general se tiene $\{F', G'\} \not\approx \{F, G\}$. También se puede obtener la serie de igualdades

$$\{F, G\}^* \approx \{F', G'\} \approx \{F', G\} \approx \{F, G'\}. \quad (3.15)$$

Si todos los paréntesis de Poisson se reemplazan por paréntesis de Dirac significa que se ha elegido trabajar sólo con vínculos de primera clase.

A partir de las ecuaciones anteriores se obtiene que

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}^*\}^* \approx \{F'_1, \{F'_2, F'_3\}\}, \quad (3.16)$$

de modo tal que la identidad de Jacobi es satisfecha en forma débil por el paréntesis de Dirac.

El Hamiltoniano de primera clase. La versión de primera clase del Hamiltoniano es

$$H' = H - \{H, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \bar{C}^{\bar{\beta}\bar{\alpha}} \bar{\chi}_{\bar{\beta}}. \quad (3.17)$$

Pero a partir de (3.04a) se ve que

$$H' = H + \bar{u}^{\bar{\alpha}} \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano extendido se puede escribir como

$$H_E = H' + \bar{v}^{\bar{\mu}} \bar{\gamma}_{\bar{\mu}}. \quad (3.19)$$

De hecho, H' está determinado módulo una combinación lineal de los vínculos.

Las ecuaciones de movimiento son válidas tanto para el paréntesis de Poisson como para el paréntesis de Dirac, es decir,

$$\{F, H_E\}^* \approx \{F, H_E\}. \quad (3.20)$$

Por lo tanto, también se puede escribir

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}^*. \quad (3.21)$$

El Hamiltoniano extendido H_E contiene R' funciones arbitrarias $\bar{v}^{\bar{\mu}}$. La separación de H_E en H' y $\bar{v} \cdot \bar{\gamma}$ no es única dado que ambas partes están definidas sólo en forma débil. La situación final es que el paréntesis de Poisson se deshecha después de haber servido su propósito de distinguir entre vínculos de primera y de segunda clase. Todas las ecuaciones de la teoría se formulan en términos del paréntesis de Dirac; los vínculos de segunda clase se reducen a identidades, es decir, a ecuaciones fuertes, lo cual reduce el número de variables independientes. El paréntesis de Dirac se reduce al de Poisson para el resto de las variables.

Significado de los vínculos de segunda clase. El paréntesis de Dirac, definido por (3.09) posee varias propiedades importantes. En primer lugar se tiene

$$\begin{aligned} \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\}^* &= \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} - \{F, \bar{\chi}_{\bar{\beta}}\} \bar{C}^{\bar{\gamma}\bar{\beta}} \{\bar{\chi}_{\bar{\gamma}}, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \\ &= \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} - \{F, \bar{\chi}_{\bar{\beta}}\} \bar{C}^{\bar{\gamma}\bar{\beta}} \bar{C}_{\bar{\gamma}\bar{\alpha}} \\ &= \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} - \{F, \bar{\chi}_{\bar{\beta}}\} \delta_{\bar{\alpha}}^{\bar{\beta}} \\ &= \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} - \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Dado que F es completamente arbitrario, el resultado anterior significa que los vínculos de segunda clase se pueden colocar fuertemente iguales a cero después de haber construido el paréntesis de Dirac.

El significado de los vínculos de segunda clase se puede entender con un ejemplo sencillo debido a Dirac. Supongamos que tenemos los siguientes dos vínculos de segunda clase

$$\begin{aligned} \chi_1 &= q^1 \approx 0, \\ \chi_2 &= p_1 \approx 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

estos vínculos son de segunda clase dado que

$$C_{12} = \{\chi_1, \chi_2\} = \{q^1, p_1\} = 1. \quad (3.24)$$

La matrix inversa es $C^{12} = 1$. El paréntesis de Dirac está dado por

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \{F, G\} + \{F, q^1\} \{p_1, G\} - \{F, p_1\} \{q^1, G\} \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right) - \left(\frac{\partial F}{\partial q^1} \frac{\partial G}{\partial p_1} - \frac{\partial G}{\partial q^1} \frac{\partial F}{\partial p_1} \right) \\ &= \sum_{i=2}^N \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Es decir, el paréntesis de Dirac es el paréntesis de Poisson sólo para las variables relevantes del espacio de fase.

En el caso de sólo vínculos de segunda clase, el Hamiltoniano primario está dado por

$$H_1 = H_c + u^\alpha \chi_\alpha. \quad (3.26)$$

En este caso las condiciones de consistencia permiten determinar los multiplicadores de Lagrange u^α . Entonces tenemos

$$H_1 = H_c - \{H_c, \chi_\beta\} C^{\alpha\beta} \chi_\alpha. \quad (3.27)$$

La derivada temporal de cualquier función en el espacio de fase está dada por

$$\dot{F} = \{F, H_c\}^* = \{F, H_c\} - \{F, \chi_\alpha\} C^{\beta\alpha} \{\chi_\beta, H_c\}. \quad (3.28)$$

La principal propiedad de esta ecuación es

$$\dot{\chi}_\alpha \equiv 0, \quad (3.29)$$

donde hemos usado el hecho que

$$\{\chi_\alpha, H_c\}^* \equiv 0. \quad (3.30)$$

Ahora es posible colocar todos los vínculos de segunda clase fuertemente iguales a cero. De este modo la ecuación (3.28) describe una dinámica

restringida a un subespacio Σ de dimensión $(2N - 2J)$. Ahora se pueden considerar como variables canónicas independientes un subconjunto de dimensión $(2N - 2J)$ de las variables canónicas originales. Haciendo esto se puede mostrar que el paréntesis de Dirac induce una estructura simpléctica sobre Σ . El número de grados de libertad es $f = N - J$.

Ahora debemos considerar sólo el paréntesis de Dirac y olvidarnos de su definición en términos del paréntesis de Poisson construido con las variables canónicas originales. La idea es encontrar nuevas variables \vec{Q} y \vec{P} tal que el paréntesis de Dirac para estas variables sea

$$\{Q^i, P_j\}^* = \delta_j^i. \quad (3.31)$$

La posibilidad de encontrar estas funciones, nuevas coordenadas canónicas, está garantizada por el Teorema de Darboux. Por lo tanto, se termina con un sistema Hamiltoniano con $(N - J)$ grados de libertad.

Fijación del gauge. El siguiente problema que debemos considerar es qué hacer con los multiplicadores de Lagrange indeterminados asociados con los vínculos de primera clase. Para esto es adecuado recordar cuál es la situación para sistemas que contienen sólo vínculos de segunda clase. A partir de ese ejemplo debería ser claro lo que se debe hacer cuando también tenemos vínculos de primera clase: se los debe transformar en vínculos de segunda clase.

Dado que tenemos funciones arbitrarias, los multiplicadores de Lagrange asociados con los vínculos de primera clase, las podemos usar para fijar condiciones adicionales (compatibles con los vínculos). Estas condiciones adicionales, impuestas con completa arbitrariedad en forma externa a la dinámica del sistema son las condiciones que fijan el *gauge*.

Consideremos entonces el caso en el cual también tenemos vínculos de primera clase. Entonces la ecuación de movimiento es (3.11). Todavía se tiene la propiedad (3.22) la cual hace posible colocar los vínculos de segunda clase fuertemente iguales a cero. Pero todavía tenemos las funciones arbitrarias $\bar{v}^{\bar{\mu}}$ en la solución de las ecuaciones de Hamilton–Dirac. Para seleccionar un representativo de esta clase de soluciones debemos dar valores a las funciones $\bar{v}^{\bar{\mu}}$. Este procedimiento se conoce como *fijación del gauge*. Para que esto sea posible debemos hacer que los multiplicadores $\bar{v}^{\bar{\mu}}$ se obtengan a partir de las condiciones de consistencia. Para lograr esto debemos introducir R' condiciones adicionales, las condiciones que fijan el gauge y que se comportan como nuevos vínculos, de manera tal que el conjunto completo de vínculos junto con las condiciones de gauge sean sólo vínculos de segunda clase. La dinámica queda

restringida a una subvariedad Σ de dimensión $(2N - 2J' - 2R')$ del espacio de fase. Entonces el número de grados de libertad es $f = N - J' - R'$. Además, esta construcción nos muestra que Σ tiene la estructura de un haz fibrado: las secciones locales φ corresponden a distintas elecciones de los $\bar{v}^{\bar{\mu}}$ y la base B , por ejemplo, a $\bar{v}^{\bar{\mu}} = 0$.

Estos nuevos vínculos los denotaremos por $\bar{\psi}_{\bar{\mu}}$ y consideraremos el conjunto extendido de vínculos $\bar{\phi} = (\bar{\chi}, \bar{\gamma}, \bar{\psi})$. La matriz $\{\bar{\phi}, \bar{\phi}\}$ está dada por

$$\begin{aligned} \{\bar{\phi}, \bar{\phi}\} &= \begin{pmatrix} \{\bar{\chi}, \bar{\chi}\} & \{\bar{\chi}, \bar{\gamma}\} & \{\bar{\chi}, \bar{\psi}\} \\ \{\bar{\gamma}, \bar{\chi}\} & \{\bar{\gamma}, \bar{\gamma}\} & \{\bar{\gamma}, \bar{\psi}\} \\ \{\bar{\psi}, \bar{\chi}\} & \{\bar{\psi}, \bar{\gamma}\} & \{\bar{\psi}, \bar{\psi}\} \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} & 0 & \bar{D}_{\bar{\alpha}\bar{\rho}} \\ 0 & 0 & \bar{E}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \\ -\bar{D}_{\bar{\beta}\bar{\nu}} & -\bar{E}_{\bar{\lambda}\bar{\nu}} & \bar{F}_{\bar{\nu}\bar{\rho}} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\bar{\alpha}\bar{\mu}} &\approx \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, \bar{\psi}_{\bar{\mu}}\}, \\ \bar{E}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &\approx \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, \bar{\psi}_{\bar{\nu}}\}, \\ \bar{F}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &\approx \{\bar{\psi}_{\bar{\mu}}, \bar{\psi}_{\bar{\nu}}\}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

La condición para que todos los vínculos sean de segunda clase es

$$\det(\{\bar{\phi}, \bar{\phi}\}) \approx \det(\bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}) [\det(\bar{E}_{\bar{\mu}\bar{\nu}})]^2 \neq 0, \quad (3.34)$$

es decir

$$\det(\bar{E}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}) = \det(\{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, \bar{\psi}_{\bar{\nu}}\}) \neq 0. \quad (3.35)$$

De este modo, los vínculos de gauge deben tener paréntesis de Poisson no-nulo con los vínculos de primera clase y tal que su determinante sea distinto de cero. Por lo tanto, existe una matriz inversa $\bar{E}^{\bar{\nu}\bar{\sigma}}$ tal que

$$\bar{E}^{\bar{\nu}\bar{\sigma}} \bar{E}_{\bar{\nu}\bar{\tau}} = \bar{E}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \bar{E}_{\bar{\tau}\bar{\nu}} = \delta_{\bar{\tau}}^{\bar{\sigma}}. \quad (3.36)$$

La condición (3.35) es equivalente a exigir que el determinante de Faddeev–Popov sea diferente de cero.

La matriz inversa de (3.33) está dada por

$$\{\bar{\phi}, \bar{\phi}\}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{C}^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} & \bar{B}^{\bar{\mu}\bar{\gamma}} & 0 \\ -\bar{B}^{\bar{\sigma}\bar{\alpha}} & \bar{G}^{\bar{\mu}\bar{\sigma}} & -\bar{E}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \\ 0 & \bar{E}^{\bar{\mu}\bar{\tau}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{B}^{\bar{\mu}\bar{\gamma}} &= -\bar{E}^{\bar{\mu}\bar{\rho}} \bar{C}^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \bar{D}_{\bar{\alpha}\bar{\rho}}, \\ \bar{G}^{\bar{\mu}\bar{\sigma}} &= \bar{E}^{\bar{\mu}\bar{\tau}} [\bar{B}^{\bar{\sigma}\bar{\alpha}} \bar{D}_{\bar{\alpha}\bar{\tau}} + \bar{E}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \bar{F}_{\bar{\nu}\bar{\tau}}]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

El Hamiltoniano extendido es ahora

$$H_E = H_c + \bar{u}^{\bar{\alpha}} \bar{\chi}_{\bar{\alpha}} + \bar{v}^{\bar{\mu}} \bar{\gamma}_{\bar{\mu}} + \bar{w}^{\bar{\mu}} \bar{\psi}_{\bar{\mu}}. \quad (3.39)$$

Ahora, la evolución temporal de una función F en el espacio de fase está dada por

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} + \bar{u}^{\bar{\alpha}} \{F, \bar{\chi}_{\bar{\alpha}}\} + \bar{v}^{\bar{\mu}} \{F, \bar{\gamma}_{\bar{\mu}}\} + \bar{w}^{\bar{\mu}} \{F, \bar{\psi}_{\bar{\mu}}\}. \quad (3.40)$$

Las condiciones de consistencia son

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\chi}}_{\bar{\alpha}} &\approx \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, H_c\} + \bar{u}^{\bar{\beta}} \bar{C}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} & + \bar{w}^{\bar{\rho}} \bar{D}_{\bar{\alpha}\bar{\rho}} &\approx 0, \\ \dot{\bar{\gamma}}_{\bar{\mu}} &\approx \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, H_c\} & + \bar{w}^{\bar{\rho}} \bar{E}_{\bar{\mu}\bar{\rho}} &\approx 0, \\ \dot{\bar{\psi}}_{\bar{\nu}} &\approx \{\bar{\psi}_{\bar{\nu}}, H_c\} - \bar{u}^{\bar{\beta}} \bar{D}_{\bar{\beta}\bar{\nu}} - \bar{v}^{\bar{\lambda}} \bar{E}_{\bar{\lambda}\bar{\nu}} + \bar{w}^{\bar{\rho}} \bar{F}_{\bar{\alpha}\bar{\rho}} &\approx 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dado que ahora todos los vínculos son de segunda clase es posible despejar todos los multiplicadores de Lagrange. La solución es

$$\begin{aligned} \bar{u}^{\bar{\gamma}} &\approx \bar{C}^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, H_c\} + \bar{B}^{\bar{\mu}\bar{\gamma}} \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, H_c\}, \\ \bar{v}^{\bar{\sigma}} &\approx -\bar{B}^{\bar{\sigma}\bar{\alpha}} \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, H_c\} + \bar{G}^{\bar{\mu}\bar{\sigma}} \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, H_c\} - \bar{E}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \{\bar{\psi}_{\bar{\nu}}, H_c\}, \\ \bar{w}^{\bar{\tau}} &\approx \bar{E}^{\bar{\mu}\bar{\tau}} \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, H_c\}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ahora, la ecuación (3.40) se puede escribir como

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\}_g^*, \quad (3.43)$$

donde $\{, \}_g^*$ es el paréntesis de Dirac *calibrado* dado por

$$\begin{aligned} \{F, G\}_g^* &= \{F, \bar{\chi}_{\bar{\gamma}}\} [\bar{C}^{\bar{\alpha}\bar{\gamma}} \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, G\} + \bar{B}^{\bar{\mu}\bar{\gamma}} \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, G\}] \\ &+ \{\bar{\gamma}_{\bar{\sigma}}, F\} [-\bar{B}^{\bar{\sigma}\bar{\alpha}} \{\bar{\chi}_{\bar{\alpha}}, G\} + \bar{G}^{\bar{\mu}\bar{\sigma}} \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, G\} - \bar{E}^{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \{\bar{\psi}_{\bar{\nu}}, G\}] \\ &+ \{\bar{\psi}_{\bar{\tau}}, F\} \bar{E}^{\bar{\mu}\bar{\tau}} \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, G\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Objeciones a la conjetura de Dirac. Cada cierto tiempo aparecen objeciones a la conjetura de Dirac. Todas estas objeciones están basadas en la observación de que, en general, las ecuaciones de movimiento que se obtienen a partir del Hamiltoniano extendido H_E , el cual contiene vínculos primarios y secundarios, no siempre son equivalentes a las ecuaciones de Lagrange correspondientes. Por esta razón, el Hamiltoniano primario (2.33) ha sido defendido por varios autores como el generador correcto de la evolución temporal para los sistemas con vínculos. De hecho, a partir de las ecuaciones de Hamilton generadas por H_1 se pueden reobtener las ecuaciones de movimiento Lagrangianas correspondientes.

Se puede mostrar (Costa *et al.*, 1985; Cabo, 1986) que la conjetura de Dirac es cierta para los sistemas que sólo poseen vínculos de primera clase. En este caso H_1 y H_E pueden generar ecuaciones de movimiento distintas para las variables que dependen del *gauge*, pero, no obstante, H_1 y H_E generan las mismas ecuaciones de movimiento para las cantidades invariantes de *gauge* del sistema. En otras palabras, se puede mostrar que H_1 y H_E dan origen a la misma dinámica.

El formalismo primario. En el formalismo primario se trabaja sólo con vínculos primarios. Si se imponen condiciones de consistencia aparecen vínculos secundarios. Esta situación se puede evitar si al mismo tiempo se imponen las condiciones que fijan el gauge. En este caso el Hamiltoniano está dado por

$$H_E = H_c + u^\alpha \chi_\alpha + v^\mu \gamma_\mu + w^\mu \psi_\mu. \quad (3.45)$$

Ahora, la evolución temporal de una función F en el espacio de fase está dada por

$$\dot{F} \approx \{F, H_c\} + u^\alpha \{F, \chi_\alpha\} + v^\mu \{F, \gamma_\mu\} + w^\mu \{F, \psi_\mu\}. \quad (3.46)$$

Las condiciones de consistencia son (3.41) (sin barras). Dado que ahora todos los vínculos son de segunda clase es posible despejar todos los multiplicadores de Lagrange. La solución es (3.42) (son barras). Ahora, la ecuación (3.46) se puede reescribir como (3.43) (sin barras), donde $\{\cdot, \cdot\}_g^*$ es el paréntesis de Dirac primario calibrado, el cual está dado por (3.44) (sin barras).

Hemos pasado por alto varios casos especiales, quizás los más interesantes, que aparecen cuando no se satisfacen algunas condiciones de integrabilidad o de regularidad. De interés especial es el caso en el cual se deben elegir todos los vínculos de gauge como

$$\bar{\psi}_{\bar{\mu}} = \{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, H_c\}, \quad (3.45)$$

y adicionalmente ocurre que

$$\{\bar{\gamma}_{\bar{\mu}}, \{\bar{\gamma}_{\bar{\nu}}, H_c\}\} \approx 0. \quad (3.46)$$

Esta propiedad depende sólo de la forma funcional del Lagrangiano, y por lo tanto es una propiedad intrínseca de la teoría bajo consideración. Por lo tanto no es posible satisfacer la condición (3.36). La solución a este problema es considerar nuevos vínculos de gauge $\bar{\psi}_{\bar{\mu}}, \bar{\varphi}_{\bar{\nu}}$ tales que el conjunto extendido de vínculos $\{\bar{\chi}, \bar{\gamma}, \{\bar{\gamma}, H_c\}, \bar{\psi}, \bar{\varphi}\}$ dé origen a una matriz de paréntesis de Poisson regular, es decir, todos los vínculos de primera clase. La electrodinámica y la relatividad general son ejemplos de esta situación. Esto explica por qué el formalismo funciona, por ejemplo, en electrodinámica, aun cuando se están usando vínculos secundarios, los cuales, en general, llevan a inconsistencias.

Referencias 3

- 3.01.** N. Mukunda and E. C. G. Sudarshan, *Structure of the Dirac bracket in classical mechanics*, J. Math. Phys. **9**, 411 (1968).
- 3.02.** R. Di Stefano, *Modification of Dirac's method of Hamiltonian analysis for constrained systems*, Phys. Rev. D **27**, 1752 (1983).
- 3.03.** A. Cabo, *On Dirac's conjecture for systems having only first-class constraints*, J. Phys. A: Math. Gen. **19**, 629 (1986).

- 3.04.** X. Gracia and J. M. Pons, *Gauge generators, Dirac's conjecture and degrees of freedom for constrained systems*, Ann. Phys. **187**, 355 (1988).
- 3.05.** J. F. Cariñena, *Theory of singular Lagrangians*, Forts. Phys. **38**, 641 (1990).
- 3.06.** E. Massa and E. Pagani, *A new look at classical mechanics of constrained systems*, Ann. Inst. Henri Poincaré — Phys. Theor. **66**, 1 (1997).
- 3.07.** J. M. Pons, *On Dirac's incomplete analysis of gauge transformations*, Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. **36**, 491 (2005).

4. Teorías Parametrizadas

Mecánica parametrizada. Una teoría es covariante si su descripción no depende del sistema de coordenadas. En el caso de la mecánica clásica esta condición es equivalente a la invariancia de parametrización.

Consideremos un sistema descrito por la acción

$$S[t] = \int L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) dt. \quad (4.01)$$

Consideremos ahora la misma acción con otra parametrización $\tau = \tau(t)$. Se tiene

$$S[\tau] = \int L\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) d\tau. \quad (4.02)$$

Un sistema es invariante de parametrización si $S[\tau] = S[t]$, es decir,

$$\int L\left(q, \frac{dq}{d\tau}\right) d\tau = \int L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) dt. \quad (4.03)$$

Esta relación se puede reescribir como

$$\int L\left(q, \frac{dt}{d\tau} \frac{dq}{dt}\right) d\tau = \int L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \frac{dt}{d\tau} d\tau. \quad (4.04)$$

Por lo tanto, se tiene

$$L\left(q, \frac{dt}{d\tau} \frac{dq}{dt}\right) = L\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \frac{dt}{d\tau}. \quad (4.05)$$

Por lo tanto, L es una función homogénea de primer orden en las velocidades

$$L\left(q, \lambda \frac{dq}{dt}\right) = \lambda L\left(q, \frac{dq}{dt}\right). \quad (4.06)$$

Derivando con respecto a λ y evaluando en $\lambda = 1$ se obtiene

$$H_c = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L \equiv 0. \quad (4.07)$$

Por lo tanto el Hamiltoniano es idénticamente nulo.

Derivando la relación (4.07) con respecto a \vec{q} se obtiene

$$W_{ij} \dot{q}^j \equiv 0. \quad (4.08)$$

Por lo tanto, la matriz Hessiana tiene un autovector nulo. Contrayendo la ecuación de Euler–Lagrange con este auto–vector nulo, y utilizando (4.07), se obtiene

$$\varphi = \dot{q}^i \alpha_i = \dot{q}^i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \right] = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} \left[L - \dot{q}^j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \right] \equiv 0. \quad (4.09)$$

Por lo tanto, a nivel Lagrangiano, a pesar de que la matriz Hessiana es singular, el vínculo es idénticamente cero.

A nivel Hamiltoniano sí existe un vínculo, el cual se obtiene como sigue. El momento canónicamente conjugado está dado por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (4.10)$$

A partir de la propiedad de homogeneidad del Lagrangiano se sigue que los momentos son expresiones homogéneas de orden cero en las velocidades, es decir, dependen sólo de las combinaciones $\dot{q}^1/\dot{q}^n, \dots, \dot{q}^{n-1}/\dot{q}^n$. Por lo tanto existe un vínculo ϕ cuya forma explícita depende de la forma explícita del Lagrangiano que se esté considerando.

El Hamiltoniano primario está dado por

$$H_1 = v \phi. \quad (4.11)$$

Este vínculo es de primera clase y se debe introducir una condición para fijar el gauge. En este caso la fijación del gauge es equivalente a elegir una parametrización particular de la acción.

La partícula relativista. El mejor ejemplo de un sistema invariante de parametrización es la partícula relativista. La acción es proporcional a la distancia, es decir,

$$\begin{aligned} S &= -m c \int ds = -m c \int (g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} \\ &= -m c \int (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2} dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

El Lagrangiano correspondiente es

$$L = -m c (g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{\delta L}{\delta x^\mu} = W_{\mu\nu} \left[\ddot{x}^\nu + \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda\rho \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho \right] = 0, \quad (4.14)$$

donde $\{\}$ son los símbolos de Christoffel asociados con la métrica \mathbf{g} y

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = \frac{m c}{(\dot{x}^2)^{3/2}} [(x^2) g_{\mu\nu} - \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu], \quad (4.15)$$

es la matriz Hessiana. Es fácil verificar que esta matriz Hessiana satisface la relación (4.08).

Contrayendo las ecuaciones de movimiento (4.14) con \dot{x}^μ se obtiene una relación equivalente a (4.09), lo cual significa que no hay vínculos Lagrangianos.

La solución general de la ecuación (4.14) es

$$\ddot{x}^\nu + \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda\rho \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho = \alpha \dot{x}^\nu, \quad (4.16)$$

Contrayendo esta ecuación con la velocidad se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} = \alpha (\dot{x}^2). \quad (4.17)$$

Por lo tanto

$$\ddot{x}^\nu + \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda\rho \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho = \frac{1}{2} \frac{1}{(\dot{x}^2)} \frac{d(\dot{x}^2)}{dt} \dot{x}^\nu. \quad (4.18)$$

La parametrización se puede elegir de manera tal que $(\dot{x}^2) = \text{constante}$. En este caso, la ecuación (4.16) se reduce a

$$\ddot{x}^\nu + \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda\rho \end{smallmatrix} \right\} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\rho = 0. \quad (4.19)$$

Este es un procedimiento habitual en la geometría de curvas y superficies y aquí corresponde a la fijación del gauge.

Los momentos canónicos son

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{m c}{\sqrt{\dot{x}^2}} g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = -\frac{m c}{\sqrt{\dot{x}^2}} \dot{x}_\mu. \quad (4.20)$$

El Hamiltoniano canónico es idénticamente nulo, $H_c \equiv 0$. El vínculo primario correspondiente es

$$\phi = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 c^2 = 0. \quad (4.21)$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano primario es el vínculo (4.21) multiplicado por una función arbitraria v , es decir,

$$H_1 = v \phi. \quad (4.22)$$

Si se intenta hacer mecánica cuántica con este Hamiltoniano se llega a la ecuación de Klein–Gordon.

Mecánica no-parametrizada. No todos los Lagrangianos de la mecánica corresponden a sistemas parametrizados. Dirac, en 1933, desarrolló un método para parametrizar Lagrangianos no-parametrizados. El método consiste en considerar el tiempo t como una nueva coordenada q^0 del espacio de configuración.

Consideremos la acción

$$S[t] = \int L(q^i, \dot{q}^i) dt. \quad (4.23)$$

Si $t = q^0$ y τ es un nuevo parámetro temporal, entonces

$$S[\tau] = \int L(q^i, \theta^i) \dot{q}^0 d\tau. \quad (4.24)$$

donde $\theta^i = \dot{q}^i / \dot{q}^0$. El nuevo Lagrangiano es

$$\bar{L} = L(q^i, \theta^i) \dot{q}^0. \quad (4.25)$$

las ecuaciones de Euler–Lagrange correspondientes son

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{L}}{\delta q^0} &= -\frac{d}{dt} \left(L - \theta^i \frac{\partial L}{\partial \theta^i} \right) = 0, \\ \frac{\delta \bar{L}}{\delta q^i} &= \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^0 - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta^i} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Los momentos correspondientes están dados por

$$\bar{p}_0 = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^0} = L - \theta^i \frac{\partial L}{\partial \theta^i}, \quad (4.27a)$$

$$\bar{p}_i = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \theta^i}. \quad (4.27b)$$

El correspondiente Hamiltoniano es idénticamente cero.

La relación (4.27a) se puede reescribir como

$$\bar{p}_0 = -H_c. \quad (4.28)$$

Si el Lagrangiano L es regular, entonces (4.27b) se puede invertir para expresar θ^i s en términos de \bar{p}^i s. Finalmente la relación (4.28) es

$$\bar{p}_0 = -H_c(q^i, \bar{p}_i). \quad (4.29)$$

Este es el vínculo Hamiltoniano. La versión cuántica de este vínculo es la ecuación de Schrödinger.

Lagrangianos $T-V$ parametrizados. Un ejemplo sencillo de un Lagrangiano no-parametrizado es

$$L = \frac{m}{2} \dot{\vec{q}}^2 - V(\vec{q}). \quad (4.30)$$

El correspondiente Lagrangiano parametrizado es

$$\bar{L} = \frac{m}{2} \frac{\dot{\vec{q}}^2}{\dot{q}^0} - V(\vec{q}) \dot{q}^0. \quad (4.31)$$

Los momentos correspondientes están dados por

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^0} = -\frac{m}{2} \frac{\dot{\vec{q}}^2}{(\dot{q}^0)^2} - V(\vec{q}), \\ \bar{p}_i &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = m \frac{\dot{q}_i}{\dot{q}^0}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Reemplazando se obtiene

$$\bar{p}_0 = -\frac{1}{2m} \vec{p}^2 - V(\vec{q}). \quad (4.33)$$

La versión cuántica de este vínculo es la ecuación de Schrödinger.

Leyes de conservación. La energía es una cantidad conservada. No obstante, para un sistema parametrizado la energía es idénticamente cero. Por lo tanto, para la construcción de cantidades conservadas se debe recurrir al teorema de Noether.

La variación de tipo Noether del Lagrangiano es

$$\begin{aligned}\Delta_\xi \bar{L} &= \xi^i \frac{\partial \bar{L}}{\partial q^i} + \xi^0 \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^0} + \xi^i \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} \\ &= \xi^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^0 + \xi^0 \left(-\theta^i \frac{\partial L}{\partial \theta^i} + L \right) + \xi^i \frac{\partial L}{\partial \theta^i}.\end{aligned}\quad (4.34)$$

La carga de Noether se define como

$$Q = \xi^0 \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^0} + \xi^i \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i}.\quad (4.35)$$

La derivada temporal de la carga de Noether es

$$\dot{Q} = \Delta_N \bar{L} + \xi^0 \frac{\delta \bar{L}}{\delta q^0} + \xi^i \frac{\delta \bar{L}}{\delta q^i}.\quad (4.36)$$

Como en el caso standard, si se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (4.26) y si se anula la variación de Noether del Lagrangiano, entonces la carga de Noether es una cantidad conservada. Por lo tanto, se debe tener

$$\xi^i \frac{\partial L}{\partial q^i} \dot{q}^0 + \xi^0 \left(-\theta^i \frac{\partial L}{\partial \theta^i} + L \right) + \xi^i \frac{\partial L}{\partial \theta^i} = 0.\quad (4.37)$$

Observemos que

$$\begin{aligned}\xi^0 &= \frac{\partial \xi^0}{\partial q^0} \dot{q}^0 + \frac{\partial \xi^0}{\partial q^i} \dot{q}^i, \\ \xi^i &= \frac{\partial \xi^i}{\partial q^0} \dot{q}^0 + \frac{\partial \xi^i}{\partial q^j} \dot{q}^j.\end{aligned}\quad (4.38)$$

Entonces, la ecuación (4.37) se reescribe como

$$\begin{aligned}\xi^i \frac{\partial L}{\partial q^i} + \left(\frac{\partial \xi^0}{\partial q^0} + \frac{\partial \xi^0}{\partial q^i} \theta^i \right) \left(-\theta^i \frac{\partial L}{\partial \theta^i} + L \right) \\ + \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial q^0} + \frac{\partial \xi^i}{\partial q^j} \theta^j \right) \frac{\partial L}{\partial \theta^i} = 0.\end{aligned}\quad (4.39)$$

Esta ecuación se debe satisfacer en forma independiente para las distintas potencias de θ ; pero para esto es necesario considerar cada situación en forma separada.

Usando el vínculo (4.07) se observa que Q se puede reescribir como

$$Q = -\xi^0 H + \xi^i p_i.\quad (4.40)$$

Después de fijar la parametrización las cantidades conservadas se dividen en tres tipos:

1. Externas. La energía.
2. Mixtas. Tal como el vector de Runge-Lenz.
3. Internas. Tal como el momento lineal y el momento angular.

Teoría de campos parametrizada. En el caso de la teoría de campos la covariancia de una teoría no es equivalente a la invariancia de parametrización.

Consideremos un sistema descrito por la acción

$$S[\mathbf{X}] = \int \mathcal{L}(\phi^A, \phi^A_\mu) d^4 X.\quad (4.41)$$

Consideremos ahora la misma acción con otra parametrización $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\mathbf{X})$. Se tiene

$$S[\mathbf{Y}] = \int \mathcal{L}(\phi^A, \phi^A_\alpha) d^4 Y.\quad (4.42)$$

Un sistema es invariante de parametrización si $S[\mathbf{Y}] = S[\mathbf{X}]$, es decir,

$$\int \mathcal{L}(\phi^A, \phi^A_\alpha) d^4 Y = \int \mathcal{L}(\phi^A, \phi^A_\mu) d^4 X.\quad (4.43)$$

Esta relación se puede reescribir como

$$\int \mathcal{L}(\phi^A, \phi^A_\mu X^\mu_\alpha) d^4 Y = \int \mathcal{L}(\phi^A, \phi^A_\mu) X d^4 Y.\quad (4.44)$$

En la relación anterior y en lo que sigue se utiliza la siguiente notación. Se tiene

$$\begin{aligned} Y^\alpha{}_\mu &= \frac{\partial Y^\alpha}{\partial X^\mu}, \\ X^\mu{}_\alpha &= \frac{\partial X^\mu}{\partial Y^\alpha}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Además

$$\begin{aligned} X &= \det(X^\mu{}_\alpha), \\ Y &= \det(Y^\alpha{}_\mu). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Además

$$\begin{aligned} X^\mu{}_\alpha Y^\alpha{}_\nu &= \delta_\nu^\mu, \\ Y^\alpha{}_\mu X^\mu{}_\beta &= \delta_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (4.47)$$

A partir de las relaciones anteriores se sigue que

$$\frac{\partial Y^\beta}{\partial X^\mu} = -Y^\alpha{}_\nu Y^\beta{}_\mu. \quad (4.48)$$

Además

$$\frac{\partial X}{\partial X^\mu} = Y^\alpha{}_\mu X. \quad (4.49)$$

Por lo tanto, se tiene

$$\mathcal{L}(\phi^A, \phi^A{}_\mu X^\mu{}_\alpha) = \mathcal{L}(\phi^A, \phi^A{}_\mu) X. \quad (4.50)$$

Por lo tanto, \mathcal{L} es una función homogénea de orden n en las primeras derivadas de los campos. Derivando con respecto a $X^\mu{}_\alpha$ y evaluando en $X^\mu{}_\alpha = \delta_\alpha^\mu$ se obtiene

$$\mathcal{H}_c{}^\mu{}_\nu = \phi^A{}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_\mu} - \mathcal{L} \delta_\nu^\mu \equiv 0. \quad (4.51)$$

Por lo tanto el tensor de momento-energía canónico es idénticamente nulo. La derivada de esta ecuación con respecto a $\phi^B{}_\lambda$ da

$$\delta_\mu^\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^B{}_\nu} + \phi^A{}_\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_\nu \partial \phi^B{}_\lambda} - \delta_\mu^\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^B{}_\lambda} \equiv 0. \quad (4.52)$$

Si contraemos esta ecuación con $\phi^B{}_{\nu\lambda}$ se obtiene

$$\phi^A{}_\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_\nu \partial \phi^B{}_\lambda} \phi^B{}_{\nu\lambda} \equiv 0. \quad (4.53)$$

Un término similar se obtiene al contraer las ecuaciones de campo con $\phi^A{}_\lambda$. De hecho, se tiene

$$\phi^A{}_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \phi^A{}_\lambda \phi^B{}_\mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^B \partial \phi^A{}_\mu} = 0. \quad (4.54)$$

Sin embargo, esto no da origen a ningún vínculo dado que

$$\phi^A{}_\lambda \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} = \frac{d}{dx^\rho} \mathcal{H}^\rho{}_\lambda \equiv 0. \quad (4.55)$$

Tal como en mecánica clásica, no hay vínculos Lagrangianos.

A nivel Hamiltoniano los vínculos se obtienen como sigue. Los momentos canónicamente conjugados a los campos están dados por

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_0} = \Pi_A^0. \quad (4.56)$$

El Hamiltoniano canónico está dado por

$$\mathcal{H}_c = \mathcal{H}_c^0_0 = \phi^A_0 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_0} - \mathcal{L} \equiv 0. \quad (4.57)$$

Los momentos π_A son funciones homogéneas de orden tres en las velocidades. Si consideramos parametrizaciones sólo en una dirección (cuatro posibilidades) los momentos son funciones homogéneas de orden cero en las velocidades. Por lo tanto, para cada dirección se obtiene, como en el caso de la mecánica, un vínculo. En total se obtienen cuatro vínculos \mathcal{H}_μ .

Aun cuando la forma explícita de estos vínculos depende del Lagrangiano inicial, el álgebra de paréntesis de Poisson es la misma para todas las teorías. es decir, se obtiene un álgebra universal. Esta álgebra está dada por

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{H}_0(\vec{x}), \mathcal{H}_0(\vec{y})\} &= [\mathcal{H}^i(\vec{x}) + \mathcal{H}^i(\vec{y})] d_i \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{\mathcal{H}_i(\vec{x}), \mathcal{H}_0(\vec{y})\} &= \mathcal{H}_0(\vec{x}) d_i \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\
\{\mathcal{H}_i(\vec{x}), \mathcal{H}_j(\vec{y})\} &= \mathcal{H}_i(\vec{y}) d_j \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{H}_j(\vec{x}) d_i \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Una teoría de campos que posea un tensor de momento-energía idénticamente nulo es una teoría de campos invariante de parametrización, en forma independiente del hecho que haya sido a través de un proceso de parametrización o no. Por ejemplo, si la teoría ya posee un tensor de momento-energía idénticamente cero el procedimiento de parametrización no es necesario, pues resulta ser redundante.

Significado físico de las teorías de campo con tensor de momento-energía idénticamente cero. Con el desarrollo de la Relatividad General se reconoció que la estructura geométrica del espacio es una propiedad física. A partir de este resultado es que se ha desarrollado el punto de vista de que toda teoría física debe ser geométrica.

Aun cuando existen muchas teorías de carácter geométrico, la relación entre las propiedades geométricas y las propiedades físicas no ha sido completamente establecida. Un ejemplo particular son las teorías de campo para las cuales el tensor de momento-energía es idénticamente nulo.

Ahora bien, si existe una relación entre las propiedades geométricas y las propiedades físicas del espacio, entonces cuál es el significado físico de las teorías con tensor de momento-energía idénticamente nulo. En este caso se tiene un sistema con vínculos y en este caso no todos los campos son dinámicos. En varias situaciones los campos juegan un rol cinemático y un rol dinámico a la vez. Para tratar en forma correcta con estos sistemas se debe separar las variables dinámicas de las cinemáticas (o las partes cinemática y dinámica de los campos). Las variables cinemáticas se seleccionan fijando el gauge, es decir, congelando las variables cinemáticas. Con estas consideraciones debería ser posible dar un significado físico a las teorías de campo con tensor de momento-energía idénticamente nulo.

El tensor de momento-energía es un objeto en el cual todos los campos, tanto cinemáticos como dinámicos, se consideran de la misma manera. Por lo tanto, el tensor de momento-energía recibe contribuciones de los campos cinemáticos (la contribución de la estructura geométrica del espacio) y una contribución de los campos dinámicos. Dado que el tensor

de momento-energía es idénticamente nulo las contribuciones dinámica y geométrica son iguales pero opuestas. Esto se puede considerar como una generalización de un principio de acción y reacción. Este es el significado físico que se debe atribuir a las teorías de campos que poseen tensor de momento-energía idénticamente nulo.

Para encontrar el contenido energético dinámico de tales teorías se debe considerar sólo los campos dinámicos, y esto se obtiene fijando el gauge. Es entonces que el tensor de momento-energía adquiere valores no-nulos que son físicamente significativos.

Superficies minimales. Consideremos una métrica inducida dada por

$$g_{\mu\nu} = G_{AB} X^A_{\mu} X^B_{\nu}. \quad (4.59)$$

El Lagrangiano está dado por

$$\mathcal{L} = \rho g^{1/2}, \quad (4.60)$$

donde $\rho = \text{constante}$ es una densidad de energía. Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta X^A} = \mathcal{W}_{AB}^{\mu\nu} \left[X^B_{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} B \\ CD \end{matrix} \right\} X^C_{\mu} X^D_{\nu} \right] = 0, \quad (4.61)$$

donde $\{ \}$ son los símbolos de Christoffel de \mathbf{G} , y

$$\mathcal{W}_{AB}^{\mu\nu} = \frac{1}{g^{1/2}} [g G_{AB} g^{\mu\nu} - X^{\mu}_A X^{\nu}_B], \quad (4.62)$$

es la matriz Hessiana. Es fácil verificar que esta matriz satisface la relación

$$\mathcal{W}_{AB}^{\mu\nu} X^B_{\nu} \equiv 0. \quad (4.63)$$

Por lo tanto no hay vínculos a nivel Hamiltoniano.

La solución general de la ecuación (4.61) es

$$X^B_{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} B \\ CD \end{matrix} \right\} X^C_{\mu} X^D_{\nu} = A_{\mu} X^B_{\nu} + A_{\nu} X^B_{\mu}, \quad (4.64)$$

Contrayendo esta ecuación con X^B_{ν} se obtiene

$$d_{\mu} g = A_{\mu} g. \quad (4.65)$$

Por lo tanto

$$X^B{}_{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} B \\ CD \end{matrix} \right\} X^C{}_{\mu} X^D{}_{\nu} = \frac{1}{g} [\partial_{\mu} g X^B{}_{\nu} + \partial_{\nu} g X^B{}_{\mu}], \quad (4.66)$$

la parametrización se puede elegir de manera tal que $g = \text{constante}$. En este caso la ecuación (4.66) se reduce a

$$X^B{}_{\mu\nu} + \left\{ \begin{matrix} B \\ CD \end{matrix} \right\} X^C{}_{\mu} X^D{}_{\nu} = 0. \quad (4.67)$$

Este procedimiento es la fijación de la parametrización.

Los momentos canónicamente conjugados están dados por

$$\pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^A} = \frac{\rho}{[\rho]^{1/2}} G_{AB} \left[(\vec{X}_1 \cdot \vec{X}_1) \dot{X}^B - (\dot{\vec{X}} \cdot \vec{X}_1) X^B{}_1 \right]. \quad (4.68)$$

El tensor de momento-energía es idénticamente nulo.

El primer vínculo se obtiene contrayendo (4.68) con $X^A{}_1$. Se obtiene

$$\mathcal{H}_1 = \pi_A X^A{}_1 = 0. \quad (4.69)$$

El segundo vínculo está dado por

$$\mathcal{H}_0 = \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - \rho \vec{X}_1 \cdot \vec{X}_1 = 0. \quad (4.70)$$

Los paréntesis de Poisson de los vínculos están dados por

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_0(\vec{x}), \mathcal{H}_0(\vec{y})\} &= -[\mathcal{H}^1(\vec{x}) + \mathcal{H}^i(\vec{y})] d_1 \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\mathcal{H}_1(\vec{x}), \mathcal{H}_0(\vec{y})\} &= 2 \mathcal{H}_0(\vec{x}) d_1 \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\mathcal{H}_1(\vec{x}), \mathcal{H}_1(\vec{y})\} &= \mathcal{H}_1(\vec{y}) d_1 \delta(\vec{x} - \vec{y}) + \mathcal{H}_1(\vec{x}) d_1 \delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Esta álgebra de vínculos es universal.

Referencias 4

4.01. P. A. M. Dirac, *Homogeneous variables in classical dynamics*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **29**, 389 (1933).

- 4.02.** H. Rund, *Note on the Lagrangian formalism in relativistic mechanics*, Nuovo Cimento **23**, 227 (1962).
- 4.03.** S. N. Storchak, *Path reparametrization in the path integral of finite dimensional manifolds*, Theor. Math. Phys. **75**, 610 (1988).
- 4.04.** D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Classical and quantum mechanics of relativistic particles*, Class. Quantum Grav. **7**, 2131 (1990).
- 4.05.** J. Guven, *Classical and quantum mechanics of a relativistic system parametrized by proper time*, Phys. Rev. D **44**, 3360 (1991).
- 4.06.** M. Pavšič, *On the interpretation of the relativistic quantum mechanics with invariant evolution parameter*, Found. Phys. **21**, 1005 (1991).
- 4.07.** J. Guven, *Dynamically constraining deconstrained dynamics*, Phys. Rev. D **45**, 1420 (1992).
- 4.08.** F. H. Gaioli and E. T. Gracia-Alvarez, *The problem of time in parametrized theories*, Gen. Rel. Grav. **26**, 1267 (1994).
- 4.09.** J. J. Halliwell and M. E. Ortiz, *Quantum mechanical composition laws in reparametrization invariant systems*, Int. J. Mod. Phys. D **3**, 195 (1994).
- 4.10.** M. Navarro, J. Guerrero and V. Aldaya, *Optics, mechanics and quantization of reparametrization invariant systems*, J. Math. Phys. **35**, 6407 (1994).
- 4.11.** J. B. Hartle, *Time and time functions in parametrized non-relativistic quantum mechanics*, Class. Quantum Grav. **13**, 361 (1996).
- 4.12.** I. D. Lawrie and R. J. Epp, *Interpretation of time-reparametrization-invariant quantum mechanics: An exactly soluble model*, Phys. Rev. D **53**, 7336 (1996).
- 4.13.** M. Finkemeier, H. Georgi and M. McIrvin, *Reparametrization invariance revisited*, Phys. Rev. D **55**, 6933 (1997).
- 4.14.** P. Hajicek, *Time evolution of observable properties of reparametrized invariant systems*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **57**, 115 (1997).
- 4.15.** J. B. Hartle and D. Marolf, *Comparing formulations of generalized quantum mechanics for reparametrization-invariant systems*, Phys. Rev. D **56**, 6247 (1997).
- 4.16.** J. Muñoz Masqué and L. M. Pozo Coronado, *Parameter-invariant second-order variational problems in one variable*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6225 (1998).
- 4.17.** R. A. Krikorian, *On the Weierstrass and Legendre conditions in Lagrangian relativistic dynamics*, Nuovo Cimento B **115**, 427 (2000).

5. Formulación Variacional de la Relatividad General

Variables de Inmersión. Como ya se ha visto repetidas veces, el espacio-tiempo normalmente está foliado tomando como hojas de la foliación las superficies de X^0 constante y las coordenadas intrínsecas dentro de cada superficie como las coordenadas X^i heredadas del espacio-tiempo. No obstante, en forma más general el espacio-tiempo se puede foliar de una manera arbitraria introduciendo las variables de inmersión \vec{X} . Las inmersiones son mapeos $X : \sigma \rightarrow \mathcal{M}$ que mapean un punto \vec{Y} en la superficie Σ en un punto del espacio-tiempo $X^\mu = (t, \vec{Y})$, donde t etiqueta las hojas de la foliación.

Usando la inmersión X^μ se pueden construir proyecciones de las cantidades del espacio-tiempo normales y tangenciales a Σ . Las proyecciones tangenciales se definen por

$$X^\mu_{;i} = \frac{\partial X^\mu}{\partial x^i}. \quad (5.01)$$

La normal a Σ está definida en forma única por las relaciones

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} n^\mu X^\nu_{;i} &= 0, \\ g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu &= 1, \end{aligned} \quad (5.02)$$

La normal depende de la inmersión, como se puede ver a partir de la expresión explícita

$$n_\mu = k \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho} X^\nu_{;i} X^\lambda_{;j} X^\rho_{;k} \epsilon^{ijk}, \quad (5.03)$$

donde k es un factor que asegura la normalización correcta.

Además se tiene

$$g_{\mu\nu} X^\mu_{;i} X^\nu_{;j} = \gamma_{ij}, \quad (5.04)$$

que es la métrica inducida sobre Σ .

Cualquier tensor V^μ del espacio-tiempo \mathcal{M} se puede escribir en términos de sus proyecciones normal y tangenciales con respecto a n_μ y $X^\mu_{;i}$. Por ejemplo, un vector espacio-temporal V^μ se puede escribir como

$$V^\mu = V^\perp n^\mu + V^i X^\mu_{;i}, \quad (5.05)$$

donde

$$\begin{aligned} V^\perp &= n_\mu V^\mu, \\ V^i &= -\gamma^{ij} g_{\mu\nu} X^\mu{}_j V^\nu. \end{aligned} \quad (5.06)$$

De ahora en adelante se suben y bajan índices usando las métricas γ_{ij} y $g_{\mu\nu}$.

El vector de deformación de la foliación se define como

$$N^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial t} = \dot{X}^\mu. \quad (5.07)$$

Las funciones lapse y shift son los coeficientes en las proyecciones normal y tangencial de \dot{X}^μ

$$\dot{X}^\mu = N n^\mu + N^i X^\mu{}_i. \quad (5.08)$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} N &= n_\mu \dot{X}^\mu, \\ N^i &= X^\mu{}_i \dot{X}^\mu. \end{aligned} \quad (5.09)$$

A partir de la ecuación (5.xx) se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial X^\mu} &= \frac{1}{N} n_\mu, \\ \frac{\partial x^i}{\partial X^\mu} &= \frac{1}{N} n_\mu N^i + X^\mu{}_i. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Teorías métricas. El ejemplo más importante de una aplicación del método de Dirac para sistemas con vínculos y de la invariancia de parametrización es la Relatividad General.

En la Relatividad General la formulación de la teoría en forma covariante y el hecho de que el tensor métrico es el campo dinámico hacen que la teoría sea una teoría parametrizada. Entonces, existen vínculos entre las variables canónicas. La libertad que existe en la elección de coordenadas se puede utilizar para reducir el número de grados de libertad independientes.

Las ecuaciones de Einstein son un sistema de diez ecuaciones a derivadas parciales de segundo orden para las componentes del tensor

métrico. Cuando se considera el sistema desde un punto de vista Hamiltoniano, es necesario concentrarse en las superficies tridimensionales inmersas en el espacio-tiempo cuatridimensional. Entonces, el estado del sistema queda determinado al especificar el valor de ciertos campos sobre la superficie. Por medio de la formulación Hamiltoniana es posible determinar el cambio inducido en las variables de campo por una deformación de la hipersuperficie.

Si F es un funcional arbitrario en el espacio de fase, entonces su cambio bajo una deformación N^μ de la superficie debe ser de la forma

$$\delta F = \int f_\mu N^\mu d^3x, \quad (5.11)$$

donde f_μ es una densidad vectorial en el espacio de fase.

A partir de la ecuación (5.11) es posible obtener información acerca de la forma del Hamiltoniano relacionando N^μ con el tensor métrico \mathbf{g} . La distancia espacio-temporal entre los puntos (t, \vec{x}) y $(t + dt, \vec{x} + d\vec{x})$ se puede expresar como

$$ds^2 = (N dt)^2 - \gamma_{ij} (N^i dt + dx^i) (N^j dt + dx^j), \quad (5.12)$$

donde $N = N^0$. Reordenando esta expresión se obtiene

$$ds^2 = (N^2 - \gamma_{ij} N^i N^j) dt^2 - 2\gamma_{ij} N^j dt dx^i - \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (5.13)$$

Por lo tanto, las componentes del tensor métrico son

$$\begin{aligned} g_{00} &= N^2 - \gamma_{ij} N^i N^j, \\ g_{0i} &= -\gamma_{ij} N^j, \\ g_{ij} &= -\gamma_{ij}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Las relaciones inversas son

$$\begin{aligned} g^{00} &= \frac{1}{N^2}, \\ g^{0i} &= -\gamma^{ij} \frac{N_j}{N^2}, \\ g^{ij} &= -\gamma^{ij} + \gamma^{ik} \gamma^{j\ell} \frac{N_k N_\ell}{N^2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

donde γ^{ij} es la inversa de γ_{ij} . Otra relación útil es la del determinante de la métrica, el cual está dado por

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -N^2 \gamma < 0, \quad (5.16)$$

donde

$$\gamma = \det(\gamma_{ij}) > 0. \quad (5.17)$$

Las relaciones inversas están dadas por

$$\begin{aligned} N^2 &= g_{00} + g^{ij} g_{0i} g_{0j}, \\ N^i &= g^{ij} g_{0j}, \\ \gamma_{ij} &= -g_{ij}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Las ecuaciones (5.14a) y (5.14b) significan que g_{00} y g_{0i} deben aparecer en el Hamiltoniano como funciones arbitrarias. Esto es debido a que N^μ se puede elegir en forma arbitraria para especificar la deformación de la hipersuperficie. Por lo tanto, no se debería esperar que las ecuaciones de Hamilton lo restringiera. Por lo tanto, los grados de libertad no-triviales están contenidos en γ_{ij} y su momento canónicamente conjugado π^{ij} .

Por lo tanto, es más adecuado trabajar con N^μ , tal como está definido en (5.18), y γ_{ij} como variables independientes en vez de usar $g_{0\mu}$ y g_{ij} . Este es un cambio de variables permitido debido a que las ecuaciones (5.1x) y (5.1x) son invertibles. Denotemos por π_μ los momentos canónicamente conjugados a N^μ . El hecho de que N^μ sea arbitrario nos dice que los π_μ deben aparecer en el Hamiltoniano multiplicados por funciones arbitrarias λ^μ que corresponden a las derivadas temporales de N^μ . Estas observaciones, junto con (5.11), indican que se debería esperar que el Hamiltoniano total fuera de la forma

$$H_T = \int [N \mathcal{H}_\perp(\mathbf{g}, \pi) + N^i \mathcal{H}_i(\mathbf{g}, \pi) + \lambda^\mu \pi_\mu] d^3x. \quad (5.19)$$

Dado que los π_μ están multiplicados por funciones arbitrarias, entonces se tienen los vínculos de primera clase

$$\pi_\mu \approx 0. \quad (5.20)$$

Además, dado que los vínculos (5.20) se deberían preservar bajo deformaciones de la superficie, se debe tener $\{\pi^\mu, H\} \approx 0$. A partir de (5.19) se sigue que $\{\pi^\mu, H\} \approx 0$ lleva a la condición adicional

$$\mathcal{H}_\mu \approx 0. \quad (5.21)$$

Los vínculos (5.21) deben ser de primera clase para que las ecuaciones de movimiento con N^μ arbitrario sean consistentes. De este modo, los vínculos (5.20) deben ser vínculos primarios mientras que los vínculos (5.21) deben ser vínculos secundarios.

Las consideraciones anteriores se aplican a cualquier Hamiltoniano en el cual el tensor métrico es el campo dinámico. De esta manera hemos obtenido una indicación acerca de la estructura del Hamiltoniano a partir de consideraciones generales. La ecuación (5.20) nos dice que cuando se va desde el Lagrangiano al Hamiltoniano, se debe tratar de sumar divergencias adecuadas a la acción de Einstein–Hilbert para que el Lagrangiano resultante no contenga derivadas temporales de N^μ . Además, el Lagrangiano debe tener una dependencia muy sencilla con respecto a N^μ para poder obtener un Lagrangiano de la forma (5.19). Por lo tanto, se necesita una manera para analizar la curvatura del espacio–tiempo que claramente distinga la dependencia de la curvatura con respecto a γ_{ij} y con respecto a N^μ . Tal análisis se puede realizar con la ayuda de las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci.

El Lagrangiano. Ahora se obtiene el Lagrangiano deseado a partir de la acción de Einstein–Hilbert. A partir de la geometría Riemanniana extrínseca se obtiene

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} (-\partial_0 \gamma_{ij} + \nabla_i N_j + \nabla_j N_i), \quad (5.22)$$

donde K_{ij} es el tensor de Gauss, o segunda forma fundamental. Esta ecuación relaciona la curvatura extrínseca con la derivada temporal $\partial_0 \gamma_{ij}$ de los campos dinámicos γ_{ij} y con las funciones N y N^i que describen la deformación de la superficie. Se debe observar que γ_{ij} también aparece en esta expresión para K_{ij} a través de los símbolos de Christoffel que aparecen en las derivadas covariantes. $\nabla_i N_j + \nabla_j N_i$. Por otra parte, en (5.22) no hay derivadas temporales de N y N^i . Por lo tanto, si se puede expresar el Lagrangiano en términos de γ_{ij} y de K_{ij} se ha logrado el propósito de eliminar las velocidades \dot{N} y \dot{N}^i . Para obtener este resultado se deben utilizar las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. Se obtiene

$$\begin{aligned}
R^{(4)} &= R^{(4)\mu\nu}{}_{\mu\nu} = R^{(4)ij}{}_{ij} + R^{(4)0i}{}_{0i} + R^{(4)i0}{}_{i0} \\
&= R^{(4)ij}{}_{ij} + 2R^{(4)0i}{}_{0i} = R^{(4)ij}{}_{ij} + 2R^{(4)0\mu}{}_{0\mu}, \quad (5.23)
\end{aligned}$$

donde se han utilizado las simetrías algebraicas del tensor de Riemann. Utilizando nuevamente las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci se obtiene

$$R^{(4)} = R^{(3)} + K^2 - K_{ij} K^{ij} + 2R^{(4)0\mu}{}_{0\mu}, \quad (5.24)$$

donde $K = K^i{}_i$.

Los tres primeros términos en (5.24) ya son de la forma que se necesita. Sólo necesitamos preocuparnos del último término $R^{(4)0\mu}{}_{0\mu}$. El primer paso es aplicar al vector normal n_μ la identidad de Ricci. Se obtiene

$$\nabla_\mu \nabla_\nu n_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu n_\lambda = -R^{(4)\rho}{}_{\lambda\mu\nu} n_\rho. \quad (5.25)$$

A continuación se multiplica por n^μ y se contrae sobre λ y ν . Entonces se obtiene

$$n^\mu (\nabla_\mu \nabla_\nu n^\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu n^\nu) = R^{(4)\mu\lambda}{}_{\nu\lambda} n_\mu n^\nu = R^{(4)0\lambda}{}_{0\lambda}. \quad (5.26)$$

Ahora se reordena el lado izquierdo de la ecuación (5.26) utilizando las siguientes identidades

$$n^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu n^\nu = \nabla_\mu (n^\nu \nabla_\nu n^\mu) - \nabla_\mu n_\nu \nabla^\nu n^\mu, \quad (5.27a)$$

$$n^\mu \nabla_\mu \nabla_\nu n^\nu = \nabla_\mu ((\nabla_\nu n^\nu) n^\mu) - (\nabla_\mu n^\mu)^2, \quad (5.27b)$$

$$\nabla_\mu n_\nu \nabla^\nu n^\mu = -K_{ij} K^{ij}, \quad (5.28a)$$

$$\nabla_\mu n^\mu = -K^2. \quad (5.28b)$$

Recordando que $g^{1/2} = N\gamma^{1/2}$ se obtiene la descomposición

$$\mathcal{L}_{EH} = R^{(4)} g^{1/2} = \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{V}^\mu}{\partial x^\mu}, \quad (5.29)$$

donde

$$\mathcal{L}_{mod} = (R^{(3)} + K_{ij} K^{ij} - K^2) N \gamma^{1/2}. \quad (5.30)$$

y

$$\mathcal{V}^\mu = 2 (n^\nu \nabla_\nu n^\mu - (\nabla_\nu n^\nu) n^\mu) g^{1/2}. \quad (5.31)$$

La ecuación (5.30) muestra que al sumar la divergencia (5.31) al Lagrangiano de Einstein–Hilbert se obtiene un Lagrangiano modificado \mathcal{L}_{mod} que no contiene derivadas temporales de N ni de N^i y que contiene sólo primeras derivadas temporales de γ_{ij} . Por lo tanto, el Lagrangiano

$$L_{mod} = \int \mathcal{L}_{mod} d^3x = \int (R^{(3)} + K_{ij} K^{ij} - K^2) N \gamma^{1/2}, \quad (5.32)$$

es el punto de partida para obtener el Lagrangiano. No obstante, antes de hacer esto, reconsideremos el término correspondiente a la divergencia. Por medio de las ecuaciones (5.14), (5.15) y (5.18) la divergencia $\partial_\mu \mathcal{V}^\mu$ se puede escribir como

$$\frac{\partial \mathcal{V}^\mu}{\partial x^\mu} = 2 \partial_0 (K \gamma^{1/2}) - \partial_i [(K N^i - \gamma^{1/2} \gamma^{ij} \partial_j N) \gamma^{1/2}]. \quad (5.33)$$

La ecuación (5.33) muestra que ambas cantidades no deseadas, a saber, las primeras derivadas temporales de N y N^i , y las segundas derivadas temporales de γ_{ij} aparecen en el Lagrangiano de Einstein–Hilbert

$$L_{EH} = \int \mathcal{L}_{EH} d^3x = \int R^{(4)} g^{1/2} d^3x, \quad (5.34)$$

en la forma de una derivada total

$$-\frac{d}{dt} \left(-2 \int K \gamma^{1/2} d^3x \right), \quad (5.35)$$

y por lo tanto se pueden eliminar desde ya omitiendo el término (5.35) en el Lagrangiano.

El hecho de que se puedan eliminar las segundas derivadas temporales de γ_{ij} de la acción no es sorprendente y se sabía desde antes que se desarrollara la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Realmente se puede lograr algo mejor, que es eliminar todas las segundas derivadas (temporales y espaciales) de los diez $g_{\mu\nu}$ sumando

una divergencia adecuada al Lagrangiano de Einstein–Hilbert (de todas maneras, las ecuaciones de Einstein serán de segundo orden). De esta manera se llega al Lagrangiano de Landau o *Gamma* – *–Gamma*, el cual se puede usar como punto de partida para encontrar el Hamiltoniano gravitacional. Lo que es mucho más importante para el formalismo Hamiltoniano es la eliminación de las primeras derivadas temporales de N y N^i .

El Hamiltoniano. Procedamos ahora a obtener la forma exacta del Hamiltoniano para el campo gravitacional a partir del Lagrangiano (5.32). dado que no aparecen derivadas temporales de los N^μ inmediatamente se obtienen los vínculos primarios (de primera clase)

$$\pi^\mu = \frac{\delta L_{mod}}{\delta \dot{N}^\mu} \approx 0, \quad (5.36)$$

como se esperaba. Los momentos π^{ij} conjugados a γ_{ij} son, por definición,

$$\pi^{ij} = \frac{\delta L_{mod}}{\delta \dot{\gamma}_{ij}}. \quad (5.37)$$

Utilizando las ecuaciones de la geometría Riemanniana extrínseca se encuentra que

$$\pi^{ij} = - (K^{ij} - K \gamma^{ij}) \gamma^{1/2}, \quad (5.38)$$

lo cual muestra que el conjugado del tensor métrico γ_{ij} (primera forma fundamental) está relacionado con la segunda forma fundamental K_{ij} . La ecuación (5.38) se puede invertir para expresar K^{ij} como una función de γ_{ij} , lo cual es equivalente a expresar las velocidades $\dot{\gamma}_{ij}$ como funciones de los momentos y de las coordenadas dinámicas. De este modo, a partir de (5.38), se obtiene que

$$K^{ij} = - (\pi^{ij} - \pi \gamma^{ij}) \gamma^{1/2}. \quad (5.39)$$

donde se ha definido

$$\pi = \pi^i_i = \gamma_{ij} \pi^{ij}. \quad (5.40)$$

Por lo tanto, aparte de (5.36), no hay otros vínculos primarios.

A continuación, usando (5.32), (5.36) y (5.39), se obtiene el Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \int \left(\pi_\mu \dot{N}^\mu + \pi^{ij} \dot{\gamma}_{ij} \right) d^3x - L_{mod} \\ &= \int \left(N \mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i \right) d^3x, \end{aligned} \quad (5.41)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\perp &= \frac{1}{2\gamma^{1/2}} (\gamma_{ik} \gamma_{j\ell} + \gamma_{i\ell} \gamma_{jk} - \gamma_{ij} \gamma_{k\ell}) \pi^{ij} \pi^{k\ell} - R^{(3)} \gamma^{1/2} \\ &= \frac{1}{\gamma^{1/2}} (\pi_{ij} \pi^{ij} - \pi^2) - R^{(3)} \gamma^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.42a)$$

$$\mathcal{H}_i = -2 \gamma_{ik} \partial_j \pi^{ij} - (2 \partial_j \gamma_{ki} - \partial_i \gamma_{kj}) \pi^{kj} = -2 \partial_j \pi_i^j. \quad (5.42b)$$

Para llegar a (5.41) se ha omitido la integral de superficie $2 \oint \pi^{ij} N_j ds_i$ del lado derecho de esa ecuación.

Para obtener el Hamiltoniano total a (5.41) se le deben sumar los vínculos de primera clase (5.36) multiplicados por funciones arbitrarias. Por lo tanto se obtiene

$$H = \int \left(N \mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i + \lambda_\mu \pi^\mu \right) d^3x, \quad (5.43)$$

de acuerdo con la discusión general al comienzo de esta sección.

Ahora, para obtener el movimiento más general que sea físicamente permisible, a (5.43) se le deben sumar los vínculos secundarios de primera clase (5.21), a saber, $\mathcal{H}_\mu \approx 0$, con coeficientes arbitrarios $u^\mu(x)$. No obstante, dado que los N^μ iniciales son arbitrarios, no se obtiene nada nuevo y se puede colocar $u^\mu = 0$ sin pérdida de generalidad. Entonces, el Hamiltoniano más general está dado por (5.43).

La ecuación (5.36) nos dice que los grados de libertad descritos por las variables (π_μ, N^μ) no son físicamente importantes (π_μ está restringido a ser cero y N^μ es arbitrario). Por lo tanto se pueden omitir estos grados de libertad del espacio de fase y considerar los N^μ como funciones arbitrarias $C^\mu(x)$ con paréntesis nulos. Formalmente, tal procedimiento es equivalente a imponer los vínculos de segunda clase

$$N^\mu - C^\mu(x) \approx 0, \quad (5.44)$$

lo cual hace que la ecuación de primera clase original (5.36) pase a ser de segunda clase. Los vínculos (5.21) siguen siendo de primera clase.

Entonces se pasa al paréntesis de Dirac por medio del procedimiento usual (que en este caso simple es equivalente a trabajar sólo con los γ_{ij} y los π^{ij}) y se considera las ecuaciones (5.36) y (5.44) como ecuaciones fuertes.

Por lo tanto, el paréntesis de Dirac calibrado es

$$\{F, G\}_g^* = \int \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \pi^{ij}} - \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \gamma_{ij}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \pi^{ij}} \right) d^3x. \quad (5.45)$$

Cuando la ecuación (5.45) se aplica a las variables canónicas fundamentales se obtiene que

$$\{\gamma_{ij}(\mathbf{x}), \pi^{k\ell}(\mathbf{y})\}_g^* = \delta_{ij}^{k\ell} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.46)$$

es el único paréntesis de Poisson no-nulo. El símbolo $\delta_{ij}^{k\ell}$ al lado derecho de (5.46) es una abreviación para

$$\delta_{ij}^{k\ell} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ij) = (k\ell) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}, \quad (5.47)$$

y la función delta de Dirac está definida, sin necesidad del tensor métrico, como

$$\int f(\mathbf{y}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d^3y = f(\mathbf{x}), \quad (5.48)$$

para cualquier función de prueba arbitraria.

Si las ecuaciones (5.36) y (5.44) se consideran como ecuaciones fuertes, entonces el Hamiltoniano es

$$H_0[\gamma_{ij}, \pi^{ij}] = \int (N \mathcal{H}_\perp + N^i \mathcal{H}_i) d^3x, \quad (5.49)$$

y se anula en forma débil debido a los vínculos de primera clase (5.21).

Por lo tanto, la derivada temporal de un funcional arbitrario F de γ_{ij} y π^{ij} está dada por

$$\dot{F} = \int N^\mu(x) \{\mathcal{F}, \mathcal{H}_\mu\} d^3x, \quad (5.50)$$

de manera tal que se verifica en forma explícita la ecuación (5.11).

Referencias 6

- 5.01. P. A. M. Dirac, *The theory of gravitation in Hamiltonian form*, Proc. Roy. Soc. London A **246**, 333 (1958).
- 5.02. P. A. M. Dirac, *Fixation of coordinates in the Hamiltonian theory of gravitation*, Phys. Rev. **114**, 924 (1959).
- 5.03. R. Arnowitt, S. Deser and C. W. Misner, *The dynamics of general relativity*, in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, ed. L. Witten (Wiley, New York, 1962).
- 5.04. T. Regge and C. Teitelboim, *The role of surface integrals in the Hamiltonian formulation of general relativity*, Ann. Phys. **88**, 286 (1974).
- 5.05. G. Domokos, *Coordinates as dynamical variables: A possible description of string interactions*, Phys. Rev. D **11**, 373 (1975).
- 5.06. J. W. York, *Boundary terms in the action principles of general relativity*, Found. Phys. **16**, 249 (1986).
- 5.07. L. P. Grishchuk and A. N. Petrov, *The Hamiltonian description of the gravitational field and gauge symmetries*, Sov. Phys. JETP **65**, 5 (1987).
- 5.08. T. Ohta and T. Kimura, *Reparametrization of space coordinates and observables in general relativity*, Nuovo Cimento B **105**, 1385 (1990).
- 5.09. G. Esposito and C. Stornaiolo, *On the ADM equations for general relativity*, Found. Phys. Lett. **13**, 279 (2000).
- 5.10. N. Savidou, *Histories approach to General Relativity: I. The space-time character of the canonical description*, Class. Quantum Grav. **21**, 615 (2004).

Apéndice A. Análisis Tensorial

El propósito de este apéndice es dar una visión general del análisis tensorial. Su forma final fue alcanzada en los trabajos de Ricci y Levi-Civita (1900). Con el desarrollo de la Relatividad General por Einstein en 1915, el análisis tensorial recibió nuevos impulsos. Esto se refleja principalmente en los trabajos de Weyl (1922), de Cartan (1926) y de Schouten (1954).

El análisis tensorial se puede considerar como un conjunto de reglas de cálculo. Si estas reglas se aplican en forma correcta, entonces está garantizado que el resultado es correcto.

Coordenadas. Cualquier conjunto ordenado de d variables reales independientes x^i , $i = 1, \dots, d$, se puede considerar como las componentes de las coordenadas \mathbf{x} de los puntos de un espacio \mathcal{X} de dimensión d en el sentido de que cada valor de \mathbf{x} define un punto de \mathcal{X} . El espacio \mathcal{X} se puede considerar como una variedad. Sin embargo, para los propósitos de esta exposición esta es una abstracción innecesaria y nos podemos restringir, sin pérdida de rigor, a espacios vectoriales.

Las propiedades del espacio \mathcal{X} , como también las relaciones que puedan existir entre distintos objetos geométricos, se pueden formular sin el uso de coordenadas. Este hecho se puede interpretar de dos maneras. Dado que los resultados no dependen de las coordenadas, entonces no es necesario usar coordenadas, que es el enfoque intrínseco preferido por los matemáticos. El segundo punto de vista es que si los resultados no dependen de las coordenadas, entonces podemos usar coordenadas dado que los resultados (es decir, las relaciones entre los distintos objetos geométricos) serán las mismas sin importar las coordenadas que hayamos utilizado. Este último punto de vista es el preferido por los físico-matemáticos y físicos teóricos donde es necesario realizar cálculos explícitos. Es este segundo punto de vista el que se utiliza en el análisis tensorial.

Si $y^a(\mathbf{x})$, $a = 1, \dots, d$, son funciones reales cuyo Jacobiano no es idénticamente cero, entonces las ecuaciones $y^a = y^a(\mathbf{x})$ definen una transformación de coordenadas, invertible, en \mathcal{X} . Los índices i, j, k, \dots están asociados con las coordenadas \mathbf{x} mientras que los índices a, b, c, \dots están asociados con las coordenadas \mathbf{y} .

La matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas está dada por

$$Y^a{}_i = \frac{\partial y^a}{\partial x^i}. \quad (\text{A.01})$$

Aquí ya aparecen algunas de las reglas básicas del análisis tensorial. Existen dos tipos de índice: los índices *contravariantes*, tal como el índice ‘ a ’ en $Y^a{}_i$, y los índices *covariantes*, tal como el índice ‘ i ’ en $Y^a{}_i$. Si consideramos la base de la línea de texto como un nivel 0 y la parte superior de la línea de texto como un nivel 1, entonces los índices contravariantes se escriben en el nivel 1 mientras que los índices covariantes se escriben en el nivel 0. Sin embargo, también existe una línea de texto inferior, tal como en las fracciones, cuyo nivel superior coincide con el nivel 0 de la línea de texto original. Por lo tanto, un índice contravariante escrito en esta línea inferior se transforma en un índice covariante, pues queda escrito en el nivel 0, tal como ocurre en $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Muchas veces usaremos, cuando sea necesario o conveniente y no haya riesgo de confusión, la abreviación $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Esta abreviación hace evidente que el índice i es un índice covariante.

Siguiendo con este juego de niveles, un índice covariante escrito en la línea inferior queda escrito en un nivel -1 . En este caso la regla es que este índice corresponde a un índice contravariante, es decir, como si estuviera escrito en el nivel 1. La segunda regla que aparece en la relación (A.01) es que los índices que aparecen a ambos lados de una ecuación son de igual variancia.

La transformación de coordenadas de \mathbf{x} a \mathbf{y} debe ser invertible, lo cual significa que se debe tener

$$\det(Y^a{}_i) \neq 0. \quad (\text{A.02})$$

Entonces, la matriz Jacobiana inversa está dada por

$$X^i{}_a = \frac{\partial x^i}{\partial y^a}. \quad (\text{A.03})$$

La matriz Jacobiana inversa satisface

$$\sum_i Y^a{}_i X^i{}_b = \delta_b^a, \quad (\text{A.04})$$

y

$$\sum_a X^i{}_a Y^a{}_j = \delta_j^i, \quad (\text{A.05})$$

donde δ_j^i es la delta de Kronecker. Una propiedad importante de la delta de Kronecker es la siguiente

$$\begin{aligned} \sum_j \delta_j^i v^j &= v^i, \\ \sum_j \delta_i^j v_j &= v_i. \end{aligned} \quad (\text{A.07})$$

Los índices que están sumados en (A.04), en (A.05) y en (A.07), aparecen en posiciones diferentes. Este hecho se puede utilizar para simplificar la notación. La convención de suma de Einstein establece que si en una expresión dos índices aparecen repetidos, con variancias diferentes (uno covariante y otro contravariante), entonces se subentiende que estos índices están sumados sobre su rango. En este caso las expresiones (A.04) y (A.05) se simplifican a

$$\begin{aligned} Y^a{}_i X^i{}_b &= \delta_b^a, \\ X^i{}_a Y^a{}_j &= \delta_j^i, \end{aligned} \quad (\text{A.08})$$

mientras que las relaciones (A.07) se reducen a

$$\begin{aligned} \delta_j^i v^j &= v^i, \\ \delta_i^j v_j &= v_i. \end{aligned} \quad (\text{A.09})$$

Tensores. A continuación podemos introducir funciones sobre el espacio \mathcal{X} , es decir, aplicaciones $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{F}$, donde \mathcal{F} es un espacio de dimensión N . Tal como en el espacio \mathcal{X} se pueden introducir coordenadas \mathbf{x} , en el espacio \mathcal{F} se pueden introducir coordenadas \mathbf{f} . En el sistema de coordenadas \mathbf{x} las coordenadas de \mathbf{f} son $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ con componentes $f^I(\mathbf{x})$, $I = 1, \dots, N$. En el sistema de coordenadas \mathbf{y} las coordenadas de \mathbf{f} son $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{y})$ con componentes $\bar{f}^A(\mathbf{y})$, $A = 1, \dots, N$. Las posibles funciones que se pueden considerar se clasifican de acuerdo con el número de componentes N de \mathbf{f} y la manera en que sus componentes se comportan bajo una transformación de coordenadas.

Las funciones más simples son las funciones escalares Φ , las cuales tienen una única componente, ϕ , la cual transforma como

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}). \quad (\text{A.11})$$

Es decir, el valor de la única componente de esta función no depende del sistema de coordenadas en el cual se evalúe.

Las siguientes funciones en orden de complejidad son los vectores. Para motivar nuestra manera de definir los vectores consideremos el diferencial de las coordenadas, cuyas componentes transforman de acuerdo con la regla

$$dy^a = Y^a_i dx^i. \quad (\text{A.12})$$

Las funciones cuyas componentes transforman de acuerdo con la regla (A.12) son los *vectores contravariantes*. La definición completa es como sigue: un *vector contravariante* \mathbf{v} es una función con N componentes v^i que transforman de acuerdo con la regla

$$\bar{v}^a(\mathbf{y}) = Y^a_i v^i(\mathbf{x}). \quad (\text{A.13})$$

Existe un segundo tipo de vectores que se obtiene considerando la derivada de la ecuación (A.11), es decir

$$\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y^a} = X^i_a \frac{\partial \phi}{\partial x^i}. \quad (\text{A.14})$$

(Esto es sólo la regla de la cadena para las derivadas.) Las funciones cuyas componentes transforman de acuerdo con la regla (A.14) son los *vectores covariantes*. La definición completa es como sigue: un *vector covariante* \mathbf{w} es una función con N componentes w_i que transforman de acuerdo con la regla

$$\bar{w}_a(\mathbf{y}) = X^i_a w_i(\mathbf{x}). \quad (\text{A.15})$$

Consideremos a continuación la función

$$\phi = v_i t^i. \quad (\text{A.16})$$

La regla de transformación correspondiente se obtiene considerando las reglas de transformación (A.13) y (A.15). Se tiene

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \bar{v}_a(\mathbf{y}) \bar{t}^a(\mathbf{y}) = X^i_a v_i(\mathbf{x}) Y^a_j t^j(\mathbf{x}). \quad (\text{A.17})$$

Los índices que están sumados tienen nombres distintos; ésta es otra de las reglas de la convención de suma: un índice que está sumado aparece

a lo más dos veces en cualquier expresión. De esta manera es claro cuál índice está sumado con cual otro índice. Dado que es claro cuál índice está sumado con cual otro índice, podemos reescribir la expresión (A.17) en otro orden, por ejemplo

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = X^i_a Y^a_j v_i(\mathbf{x}) t^j(\mathbf{x}). \quad (\text{A.18})$$

Utilizando (A.08) se tiene

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \delta^i_j v_i(\mathbf{x}) t^j(\mathbf{x}), \quad (\text{A.19})$$

Por lo tanto

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = v_i(\mathbf{x}) v^i(\mathbf{x}), \quad (\text{A.20})$$

donde hemos utilizado (A.09). Finalmente

$$\bar{\phi}(\mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}). \quad (\text{A.21})$$

Por lo tanto, $v_i t^i$ es una función escalar, la cual corresponde a una generalización del producto ‘escalar’ de dos vectores.

Hasta el momento tenemos tres tipos de objetos: escalares, que transforman como en (A.11); vectores contravariantes, que transforman como en (A.13); y vectores covariantes, que transforman como en (A.15).

El siguiente tipo de función, en orden de complejidad, son los tensores. Los tensores se definen de acuerdo con una extensión directa de las reglas de transformación (A.11), (A.13) y (A.15). Por ejemplo, un tensor covariante de segundo rango \mathbf{g} es una función con N^2 componentes g_{ij} que transforman de acuerdo con la regla

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = X^i_a X^j_b g_{ij}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.22})$$

En forma similar, un ‘tensor de segundo rango contravariante’ \mathbf{h} es un objeto con N^2 componentes h^{ij} que transforman como

$$\bar{h}^{ab}(\mathbf{y}) = Y^a_i Y^b_j h^{ij}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.23})$$

También es posible definir tensores con covariancia mixta; un tensor de segundo rango con covariancia mixta es un objeto \mathbf{k} con N^2 componentes k^i_j que transforman como

$$\bar{k}^a_b(\mathbf{y}) = Y^a_i X^j_b k^i_j(\mathbf{x}). \quad (\text{A.24})$$

La contracción de los índices de este objeto da

$$\bar{k}_a^a(\mathbf{y}) = Y^a{}_i X^j{}_a k^i{}_j(\mathbf{x}) = \delta_i^j k^i{}_j(\mathbf{x}) = k^i{}_i(\mathbf{x}). \quad (\text{A.25})$$

Por lo tanto, la suma de las componentes con índices iguales, es decir la suma de las componentes de la diagonal, es decir la traza, es un escalar.

Simetrías de los Tensores. Los clasificación de los tensores admite un refinamiento adicional si consideramos las propiedades algebraicas de simetría de sus componentes.

Sea \mathbf{T} un tensor de segundo rango covariante, es decir, con componentes T_{ij} . El número de componentes independientes de este tensor es d^2 . No obstante, si el tensor posee algún tipo de simetría, entonces el número de componentes es menor que el número anterior.

Un tensor de segundo rango es simétrico si sus componentes no cambian bajo un intercambio de sus índices, es decir, si

$$S_{ji} = S_{ij}. \quad (\text{A.26})$$

Un tensor es anti-simétrico si sus componentes cambian de signo cuando se intercambian sus índices, es decir, si

$$A_{ji} = -A_{ij}. \quad (\text{A.27})$$

Como una consecuencia directa de las leyes de transformación de los tensores de segundo rango, a saber (A.22), las ecuaciones (A.26) y (A.27) se cumplen en cualquier sistema de coordenadas. Por lo tanto, las propiedades de simetría de los tensores son independientes del sistema de coordenadas.

El número de componentes de un tensor simétrico se obtiene como sigue. Cuando ambos índices son diferentes, el primer índice puede tomar d valores mientras que el segundo índice puede tomar $(d-1)$ valores; por lo tanto, se tiene $d(d-1)$ posibilidades; pero, dado que las componentes con los índices intercambiados son linealmente dependientes, se está contando dos veces la misma componente; para evitar este doble conteo el resultado anterior se debe dividir por 2 para obtener $d(d-1)/2$. Cuando ambos índices son iguales el número de componentes linealmente independientes es d . Finalmente tenemos

$$S_{d,2} = \frac{1}{2} d(d-1) + d = \frac{1}{2} d(d+1). \quad (\text{A.28})$$

El número de componentes de un tensor anti-simétrico se obtiene como sigue. Necesariamente ambos índices son diferentes; entonces, el primer índice puede tomar d valores mientras que el segundo puede tomar sólo $(d-1)$ valores; por lo tanto, se tienen $d(d-1)$ posibilidades; pero, dado que las componentes con los índices intercambiados son linealmente dependientes, se está contando dos veces la misma componente; por lo tanto, el resultado anterior se debe dividir por 2, y se obtiene

$$A_{d,2} = \frac{1}{2} d(d-1). \quad (\text{A.29})$$

Sea \mathbf{T} un tensor covariante de segundo rango con componentes T_{ij} sin ninguna simetría particular, es decir, no-simétrico. A partir de este tensor es siempre posible construir un tensor simétrico \mathbf{T}_S y un tensor anti-simétrico \mathbf{T}_A . En efecto, basta con definir

$$\begin{aligned} T_{(ij)} &= \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}), \\ T_{[ij]} &= \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}), \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

donde los paréntesis redondos ‘(·)’ y los paréntesis cuadrados ‘[·]’ denotan las operaciones de simetrización y anti-simetrización sobre los índices.

Cualquier tensor de segundo rango se puede escribir como la suma de sus partes simétrica y anti-simétrica, a saber,

$$T_{ij} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) = T_{(ij)} + T_{[ij]}. \quad (\text{A.31})$$

Dado que un tensor \mathbf{T} de segundo rango se puede escribir como la suma de su parte simétrica y de su parte anti-simétrica, entonces se debe tener que las componentes de la parte simétrica junto con las componentes de la parte anti-simétrica son iguales al número total de componentes del tensor no-simétrico. En efecto

$$S_{d,2} + A_{d,2} = \frac{1}{2} d(d+1) + \frac{1}{2} d(d-1) = d^2 = T_{d,2}. \quad (\text{A.32})$$

Si un tensor, de segundo rango, es simétrico, entonces su parte anti-simétrica es cero, y si un tensor, de segundo rango, es anti-simétrico, entonces su parte simétrica es cero.

También se puede introducir propiedades de simetría para tensores de rango superior. Sin embargo, la descomposición en parte simétrica y en parte anti-simétrica no es suficiente, y la descomposición completa de un tensor involucra partes con otros tipos de simetría. Para realizar esta descomposición es conveniente recurrir a los diagramas de Young y a otras herramientas combinatorias, cuya consideración está fuera del alcance de esta monografía.

Como un ejemplo, consideremos tensores de tercer rango. Sea \mathbf{T} un tensor covariante de tercer rango, es decir, con componentes T_{ijk} . En este caso se pueden definir, como antes, la parte completamente simétrica, $T_{(ijk)}$, y la parte completamente anti-simétrica, $T_{[ijk]}$, como

$$\begin{aligned} T_{(ijk)} &= \frac{1}{6} (T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jki} + T_{jik} + T_{kij} + T_{kji}), \\ T_{[ijk]} &= \frac{1}{6} (T_{ijk} - T_{ikj} + T_{jki} - T_{jik} + T_{kij} - T_{kji}). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Los tensores anteriores son simétrico, y anti-simétrico, respectivamente, con respecto al intercambio de cualquier par de índices, es decir,

$$\begin{aligned} T_{(ijk)} &= T_{(ikj)} = T_{(jki)} = T_{(jik)} = T_{(kij)} = T_{(kji)}, \\ T_{[ijk]} &= -T_{[ikj]} = T_{[jki]} = -T_{[jik]} = T_{[kij]} = -T_{[kji]}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

El número de componentes simétricas y anti-simétricas es

$$\begin{aligned} S_{d,3} &= \frac{1}{6} d(d+1)(d+2), \\ A_{d,3} &= \frac{1}{6} d(d-1)(d-2). \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Es fácil verificar que $S_{d,3} + A_{d,3} \neq d^3$. En el caso de tercer rango existe una componente adicional que no es ni simétrica ni anti-simétrica, sino que posee otro tipo de simetría. Esta componente adicional se obtiene considerando lo que queda del tensor después de restarle las partes simétrica y anti-simétrica, es decir,

$$M_{ijk} = T_{ijk} - T_{(ijk)} - T_{[ijk]} = T_{ijk} - T_{\{ijk\}}, \quad (\text{A.36})$$

donde

$$T_{\{ijk\}} = \frac{1}{3} (T_{ijk} + T_{jki} + T_{kij}). \quad (\text{A.37})$$

El número de componentes independientes de la componente adicional M_{ijk} se obtiene como la diferencia entre el número de componentes de T_{ijk} , d^3 , y el número de componentes de la partes simétrica y anti-simétrica en (A.35), es decir,

$$M_{d,3} = d^3 - S_{d,3} - A_{d,3} = \frac{2}{3} d(d^2 - 1). \quad (\text{A.38})$$

También es posible definir partes completamente simétrica y completamente anti-simétricas para tensores de rango superior cualquiera. Particularmente interesante es la expresión para el número de componentes independientes de un tensor \mathbf{T} completamente anti-simétrico de rango r , es decir, con componentes $T_{i_1 \dots i_r}$. Se tiene

$$A_{d,r} = \frac{d!}{(d-r)!r!}. \quad (\text{A.39})$$

Los tensores, y los escalares y vectores como casos particulares, son los preferidos por matemáticos y físicos para expresar propiedades geométricas dado que las relaciones entre ellos no dependen del sistema de coordenadas en que se escriban. Esta afirmación requiere una aclaración; las componentes de los tensores sí dependen del sistema de coordenadas en que se evalúen. Sin embargo, dado que la matriz Jacobiana es una matriz regular, ecuación (A.02), cuando un tensor es nulo en un sistema de coordenadas también lo es en cualquier otro sistema de coordenadas. Es en este sentido en que se debe entender que los resultados, aun cuando se obtienen con el uso de coordenadas, no dependen del sistema de coordenadas particular que se haya utilizado en su obtención.

A continuación estudiaremos dos situaciones que involucran leyes de transformación no-tensoriales.

El Símbolo de Levi-Civita. El número de componentes algebraicamente independientes de un tensor completamente anti-simétrico está dado por (A.39). Un caso particularmente interesante es cuando el rango del tensor coincide con la dimensión del espacio base, es decir, $r = d$. Entonces se obtiene

$$A_{d,d} = 1. \quad (\text{A.41})$$

Por lo tanto, un tensor completamente anti-simétrico, de rango igual a la dimensión del espacio base, posee sólo una componente algebraicamente independiente, y por lo tanto el tensor se puede escribir como

$$A^{i_1 \cdots i_d} = A \epsilon^{i_1 \cdots i_d}, \quad (\text{A.42})$$

donde $\epsilon^{i_1 \cdots i_d}$ es el símbolo de Levi-Civita.

Las leyes de transformación de $\epsilon^{i_1 \cdots i_d}$ se determinan estudiando las leyes de transformación de $A^{i_1 \cdots i_d}$. Para fijar las ideas, es conveniente primero considerar el caso de 2 dimensiones. En dos sistemas de coordenadas distintos, el mismo tensor A^{ij} se escribe como

$$\begin{aligned} A^{ij}(\mathbf{x}) &= A(\mathbf{x}) \epsilon^{ij}, \\ \bar{A}^{ab}(\mathbf{y}) &= \bar{A}(\mathbf{y}) \bar{\epsilon}^{ab}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Además, estos tensores están relacionados por

$$\bar{A}^{ab}(\mathbf{y}) = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} A^{ij}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.45})$$

Reemplazando se obtiene

$$\bar{A}(\mathbf{y}) \bar{\epsilon}^{ab} = \frac{\partial y^a}{\partial x^i} \frac{\partial y^b}{\partial x^j} A(\mathbf{x}) \epsilon^{ij}. \quad (\text{A.46})$$

La única ecuación que contiene alguna información es (1, 2), a saber,

$$\bar{A}(\mathbf{y}) \bar{\epsilon}^{12} = \left(\frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial y^2}{\partial x^2} - \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \right) A(\mathbf{x}) \epsilon^{12}. \quad (\text{A.47})$$

En el paréntesis se reconoce la definición del Jacobiano, es decir, del determinante de la transformación $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$. Por lo tanto, A transforma como

$$\bar{A}(\mathbf{y}) = J(\mathbf{y}, \mathbf{x}) A(\mathbf{x}). \quad (\text{A.48})$$

La función A no tiene índices y por lo tanto se podría pensar que es un escalar. Pero no lo es, dado que su regla de transformación es (A.48) y no (A.11). Las funciones que transforman de acuerdo con (A.48) son las densidades escalares de peso 1. Esto significa que el símbolo $\epsilon^{i_1 \cdots i_d}$ no es un tensor y que transforma como

$$\bar{\epsilon}^{a_1 \cdots a_d}(\mathbf{y}) = J^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial y^{a_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{a_d}}{\partial x^{i_d}} \epsilon^{i_1 \cdots i_d}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.49})$$

Las funciones que transforman de esta manera son densidades tensoriales de peso -1.

El símbolo de Christoffel sirve para definir el determinante y la inversa de los tensores covariantes. Para construir el determinante de un tensor de segundo de segundo rango recordemos su regla de transformación, a saber,

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} g_{ij}(\mathbf{x}). \quad (\text{A.50})$$

El determinante de esta relación es

$$\bar{g}(\mathbf{y}) = \det[\bar{g}_{ab}(\mathbf{y})] = \det \left[\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a} \right) \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^b} \right) g_{ij}(\mathbf{x}) \right]. \quad (\text{A.51})$$

Imponiendo la propiedad multiplicativa del determinante se debe tener

$$\begin{aligned} \bar{g}(\mathbf{y}) &= \left[\det \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^a} \right) \right]^2 \det[g_{ij}(\mathbf{x})] \\ &= J^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) g(\mathbf{x}) = J^{-2}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) g(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

El determinante de \mathbf{g} es una función que transforma con el cuadrado de $J^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Por lo tanto, es posible que en la definición de determinante aparezca dos veces el símbolo de Levi-Civita ϵ , el cual transforma con $J^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Por lo tanto, una definición razonable de determinante sería

$$g = \det(g_{ij}) = \frac{1}{d!} \epsilon^{i_1 \cdots i_d} \epsilon^{j_1 \cdots j_d} g_{i_1 j_1} \cdots g_{i_d j_d}. \quad (\text{A.53})$$

Si $g \neq 0$, entonces es posible definir la métrica inversa, o contravariante, como

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}. \quad (\text{A.54})$$

Por lo tanto

$$g^{jj} = \frac{1}{(d-1)!} \frac{1}{g} \epsilon^{i i_1 \dots i_{(d-1)}} \epsilon^{j j_1 \dots j_{(d-1)}} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_{(d-1)} j_{(d-1)}}. \quad (\text{A.55})$$

Es fácil verificar que se satisface

$$g^{ik} g_{jk} = \delta_j^i. \quad (\text{A.56})$$

Por lo tanto, el tensor \mathbf{g}^{-1} , con componentes g^{ij} , es el tensor matricialmente inverso a \mathbf{g} .

La Conexión. Un vector covariante \mathbf{v} es un objeto con componentes v_i que transforman como en (A.205). Por lo tanto, las componentes de la derivada de \mathbf{v} transforman de acuerdo con

$$\frac{\partial \bar{v}_a}{\partial y^b}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial v_i}{\partial x^j}(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^a \partial y^b} v_i(\mathbf{x}). \quad (\text{A.57})$$

El primer término contiene la regla de transformación correcta para un tensor. Sin embargo, el segundo término contiene derivadas de segundo orden de la transformación de coordenadas, y esto no corresponde a la ley de transformación para un tensor.

La derivada ordinaria de un vector no transforma como un tensor, y, por lo tanto, no es un tensor. La relación anterior se podría considerar como una nueva regla de transformación que define un nuevo tipo de objetos. Sin embargo, el hecho que se mezcle la función con sus derivadas hace que esta regla sea de poca utilidad. Si un objeto geométrico que transforma de acuerdo con (A.57) se anula en un cierto sistema de coordenadas, entonces no necesariamente se anula en cualquier otro sistema de coordenadas.

Una consecuencia más grave que se obtiene a partir de las relaciones (A.57) es que la derivada ordinaria no es una operación tensorial, es decir, no mapea tensores en tensores y por lo tanto no conserva la tensorialidad. Es decir, el valor de la derivada dependerá del sistema de coordenadas en el cual sea evaluada. Para corregir esta situación es necesario definir una operación de derivación que garantice que el objeto que se obtiene es un tensor, es decir, una nueva operación de derivación ∇ .

Para que la operación de derivación pueda tener un significado invariante es necesario definir un nuevo tipo de derivada. En (A.57) el último término, lineal en \mathbf{v} , es el que rompe la ley de transformación

tensorial. Una definición conveniente de una derivada covariante debería considerar un término lineal en \mathbf{v} , con el propósito de compensar el término ilegal. Definamos por lo tanto, la derivada covariante $\nabla \mathbf{v}$ con componentes

$$\nabla_j v_i = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ji} v_k, \quad (\text{A.58})$$

donde Γ^k_{ji} son las componentes de $\mathbf{\Gamma}$, un nuevo objeto geométrico que se conoce como la *conexión*.

Para que (A.503) sean las componentes de un tensor éstas deben transformar como

$$\bar{\nabla}_b \bar{v}_a(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \nabla_j v_i(\mathbf{x}). \quad (\text{A.59})$$

Usando las reglas de transformación para \mathbf{v} , y sus derivadas, ecuaciones (A.205) y (A.502), se obtiene la regla de transformación para las componentes de la conexión

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}^c_{ab}(\mathbf{y}) &= \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \left[\Gamma^k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial y^c}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 y^c}{\partial x^i \partial x^j} \right] \\ &= \frac{\partial y^c}{\partial x^k} \left[\Gamma^k_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} + \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^a \partial y^b} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Por lo tanto, la conexión no es un tensor. Esto no es sorprendente dado que se necesita algo que no sea un tensor para balancear el carácter no tensorial de la derivada ordinaria y de modo tal que la combinación resultante sea un tensor.

En (A.60) tenemos una nueva regla de transformación. Una función $\mathbf{\Gamma}$ cuyas componentes transforman de acuerdo con (A.60) es una *conexión*. El concepto de conexión fue introducido en 1917 por Levi-Civita.

Para que la derivada covariante ∇ sea una operación de derivación es necesario que satisfaga la regla de Leibniz:

$$\nabla(\mathbf{A}\mathbf{B}) = (\nabla\mathbf{A})\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\mathbf{B}), \quad (\text{A.61})$$

donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son objetos geométricos cualesquiera: escalares, vectores, tensores, etc.

La regla de Leibniz (A.61) nos permite obtener la derivada covariante de otros objetos. Se puede verificar que si \mathbf{v} es un vector covariante

y ϕ es un escalar, entonces $\mathbf{V} = \phi \mathbf{v}$ también es un vector covariante. Las componentes de la derivada covariante de \mathbf{v} están dadas por

$$\begin{aligned}\nabla_i(\phi v_j) &= \frac{\partial(\phi v_j)}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij} \phi v_k, \\ \phi \nabla_i v_j + v_j \nabla_i \phi &= \phi \nabla_i v_j + v_j \frac{\partial \phi}{\partial x^i}.\end{aligned}\quad (\text{A.62})$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\nabla_i \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x^i}.\quad (\text{A.63})$$

Es decir, la derivada covariante de una función escalar es simplemente la derivada ordinaria.

Consideremos ahora la función escalar particular $\phi = v_i t^i$, donde v_i son las componentes de un vector covariante \mathbf{v} y t^i son las componentes de un vector contravariante \mathbf{t} . Entonces se tiene

$$\begin{aligned}\nabla_i(v_k t^k) &= \frac{\partial(v_k t^k)}{\partial x^i}, \\ v_k \nabla_i t^k + t^k \nabla_k v_k &= v_k \frac{\partial t^k}{\partial x^i} + t^k \frac{\partial v_k}{\partial x^i}.\end{aligned}\quad (\text{A.64})$$

Reemplazando la expresión para la derivada de un vector covariante, (A.58), se obtienen las componentes de la derivada covariante de un vector contravariante:

$$\nabla_i t^k = \frac{\partial t^k}{\partial x^i} + \Gamma^k_{ij} t^j.\quad (\text{A.65})$$

La derivada covariante de un tensor de rango superior arbitrario, que se obtiene utilizando el mismo mecanismo utilizado en las situaciones anteriores, es la derivada ordinaria y un número de términos, que contiene a la conexión Γ , igual al rango del tensor. Para índices covariantes se usa el signo negativo, y para índices contravariantes un signo positivo, es decir,

$$\begin{aligned}\nabla_k T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= \frac{\partial T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}}{\partial x^k} \\ &+ \Gamma^{i_1}_{ki} T_{j_1 \dots j_s}^{i_2 \dots i_r} + \dots + \Gamma^{i_r}_{ki} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_{(r-1)}} \\ &- \Gamma^j_{kj_1} T_{jj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots - \Gamma^j_{kj_s} T_{j_1 \dots j_{(s-1)}j}^{i_1 \dots i_r}.\end{aligned}\quad (\text{A.66})$$

Un propiedad interesante, y útil, de la conexión es que si Γ_1 y Γ_2 son dos conexiones, entonces las leyes de transformación de sus componentes están dadas por (A.60). Considerando la diferencia de las leyes de transformación respectivas, se obtiene

$$\Delta \bar{\Gamma}^c_{ab}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \frac{\partial y^c}{\partial x^k} \Delta \Gamma^k_{ij}(\mathbf{x}),\quad (\text{A.67})$$

donde

$$\Delta \Gamma^k_{ij} = \Gamma_2^k_{ij} - \Gamma_1^k_{ij}.\quad (\text{A.68})$$

Es decir, la diferencia de dos conexiones es un tensor y, por lo tanto, a partir de una conexión dada se puede construir una segunda conexión sumándole un tensor. Entonces, en general se puede escribir

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{\circ}{\Gamma}^k_{ij} + A^k_{ij}.\quad (\text{A.69})$$

Para terminar esta sección evaluemos algunas combinaciones de derivadas importantes. La primera expresión interesante es la contracción de la ecuación (A.65). Se obtiene

$$\nabla_i t^i = \partial_i t^i + \Gamma^i_{ij} t^j.\quad (\text{A.70})$$

Esta expresión se puede considerar como la forma covariante de la divergencia de un vector. Por otra parte, la segunda derivada de una función escalar se obtiene reemplazando $\mathbf{v} = \nabla \phi = (\partial \phi / \partial x)$ en la ecuación (A.503) y se obtiene

$$\nabla_j \nabla_i \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x^k},\quad (\text{A.71})$$

El Tensor de Riemann. La derivada ordinaria de un vector produce un objeto que no es un tensor. Al considerar las reglas de transformación de la conexión nos encontramos frente a una situación similar, es decir, frente a una regla de transformación no-tensorial. La pregunta que surge en forma natural es si la derivada ordinaria (que no es una operación tensorial) de un objeto que no es un tensor (la conexión) puede ser un tensor. La respuesta es afirmativa y el tensor en cuestión es el tensor de Riemann.

Las segundas derivadas covariantes de cualquier objeto no conmutan y, dado que la derivada covariante es una operación tensorial, la diferencia de dos derivadas covariantes debe ser un tensor. Esta diferencia está dada por la identidad de Ricci

$$\nabla_i \nabla_j v_k - \nabla_j \nabla_i v_k = -R^l{}_{kij}(\mathbf{\Gamma}) v_l + T^l{}_{ij}(\mathbf{\Gamma}) \nabla_k v_l. \quad (A.72)$$

donde

$$R^k{}_{lij}(\mathbf{\Gamma}) = \partial_i \Gamma^k{}_{jl} - \partial_j \Gamma^k{}_{il} + \Gamma^k{}_{im} \Gamma^m{}_{jl} - \Gamma^k{}_{jm} \Gamma^m{}_{il}, \quad (A.73)$$

es el *tensor de Riemann*, y

$$T^k{}_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = \Gamma^k{}_{ij} - \Gamma^k{}_{ji}, \quad (A.74)$$

es la *torsión*.

La identidad de Ricci se puede extender a tensores de rango superior y de otra covariancia, por ejemplo:

$$\nabla_i \nabla_j v^k - \nabla_j \nabla_i v^k = R^k{}_{lij}(\mathbf{\Gamma}) v^l - T^l{}_{ij}(\mathbf{\Gamma}) \nabla_l v^k. \quad (A.75)$$

A partir de contracciones del tensor de Riemann solamente, que no involucren ningún tensor adicional, se pueden obtener dos tensores de segundo rango, a saber, el tensor de Riemann–Ricci

$$H_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = R^k{}_{kij}(\mathbf{\Gamma}) = \partial_i \Gamma_j - \partial_j \Gamma_i, \quad (A.76)$$

con $\Gamma_i = \Gamma^k{}_{ik}$, y el tensor de Ricci, el cual está dado por

$$R_{ij}(\mathbf{\Gamma}) = R^k{}_{ikj}(\mathbf{\Gamma}) = \partial_k \Gamma^k{}_{ji} - \partial_j \tilde{\Gamma}_i + \Gamma^k{}_{km} \Gamma^m{}_{ji} - \Gamma^k{}_{jk} \Gamma^m{}_{ki}, \quad (A.77)$$

donde $\tilde{\Gamma}_i = \Gamma^k{}_{ki}$. El tensor \mathbf{H} es anti-simétrico mientras que el tensor de Ricci no tiene simetrías. Distintos tipos de espacios se pueden obtener considerando los posibles valores de $T^k{}_{ij}$, H_{ij} y R_{ij} .

Una permutación cíclica de los índices inferiores del tensor de Riemann lleva a la relación

$$\begin{aligned} & R^k{}_{\ell ij}(\mathbf{\Gamma}) + R^k{}_{ij\ell}(\mathbf{\Gamma}) + R^k{}_{j\ell i}(\mathbf{\Gamma}) \\ &= 2 [\nabla_i T^k{}_{j\ell} + \nabla_j T^k{}_{\ell i} + \nabla_\ell T^k{}_{ij}] \\ &+ 4 [T^m{}_{ij} T^k{}_{m\ell} + T^m{}_{j\ell} T^k{}_{mi} + T^m{}_{\ell i} T^k{}_{mj}]. \end{aligned} \quad (A.78)$$

Por lo tanto, si $\mathbf{T} = 0$ se obtiene la relación

$$R^k{}_{\ell ij}(\mathbf{S}) + R^k{}_{ij\ell}(\mathbf{S}) + R^k{}_{j\ell i}(\mathbf{S}) \equiv 0. \quad (A.79)$$

Para la conexión (A.69) el tensor de Riemann correspondiente está dado por

$$\begin{aligned} R^k{}_{lij}(\mathbf{\Gamma}) &= R^k{}_{lij}(\mathring{\mathbf{\Gamma}}) + \mathring{\nabla}_i A^k{}_{j\ell} - \mathring{\nabla}_j A^k{}_{i\ell} \\ &+ A^k{}_{im} A^m{}_{j\ell} - A^k{}_{jm} A^m{}_{i\ell}. \end{aligned} \quad (A.79)$$

Objetos geométricos. Las leyes de transformación de los escalares y de los vectores covariantes y contravariantes se pueden escribir simbólicamente como

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\mathbf{y}) &= \mathbf{J}^0 \phi(\mathbf{x}), \\ \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) &= \mathbf{J}^1 \mathbf{v}(\mathbf{x}), \\ \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{y}) &= \mathbf{J}^{-1} \mathbf{v}(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (A.80)$$

Para un tensor r veces covariante y s veces contravariante se tiene

$$\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{y}) = \mathbf{J}^r \mathbf{J}^{-s} \mathbf{T}(\mathbf{x}). \quad (A.81)$$

El concepto de tensor fue posteriormente generalizado al de ‘objeto geométrico’ por Schouten (1954). Un objeto geométrico Φ es una función (tal como en la definición que se dió al comienzo de esta sección) que transforma como

$$\bar{\Phi}(\mathbf{y}) = F(\mathbf{J}) \Phi(\mathbf{x}), \quad (A.82)$$

En términos de componentes se tiene

$$\bar{\phi}^A(\mathbf{y}) = F^A{}_I(\mathbf{J}) \phi^I(\mathbf{x}), \quad (A.83)$$

La derivada ordinaria de ϕ^A transforma como

$$\frac{\partial \bar{\phi}^A}{\partial y^a}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \left[F^A{}_I(\mathbf{J}) \frac{\partial \phi^I}{\partial x^i}(\mathbf{x}) + \partial_i F^A{}_I(\mathbf{x}) \phi^I(\mathbf{x}) \right]. \quad (\text{A.84})$$

Estas componentes no transforman de acuerdo con la regla (A.83). La situación es la misma que para la derivada ordinaria de un vector: el primer término posee la ley de transformación correcta mientras que el segundo término no la posee. Para obtener una derivada con las reglas de transformación correctas se define la derivada covariante $\mathbf{D}\Phi$ con componentes

$$D_i \phi^I = \frac{\partial \phi^I}{\partial x^i} + (A_i)^I{}_J \phi^J, \quad (\text{A.85})$$

donde \mathbf{A} es la conexión. El propósito del segundo término es compensar el último término en (A.84). Para que esta función posea las reglas de transformación correcta se debe tener

$$\bar{D}_a \bar{\phi}^A(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} F^A{}_I(\mathbf{J}) D_i \phi^I(\mathbf{x}). \quad (\text{A.86})$$

Combinando (A.82), (A.83) y (A.84), se obtiene que la conexión \mathbf{A} debe transformar como

$$(\bar{A}_a)^A{}_B(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} F^A{}_I \left[(A_i)^I{}_J(\mathbf{x}) F^J{}_B + \frac{\partial F^I{}_B}{\partial x^i} \right]. \quad (\text{A.87})$$

Los objetos \mathbf{A} que transforman de acuerdo con (A.87) son las conexiones, y corresponden a las transformaciones de los campos de *gauge* de la teoría de campos.

Tal como en el caso anterior, las derivadas covariantes no conmutan y se tiene

$$D_i D_j \phi^A - D_j D_i \phi^A = (F_{ij})^A{}_C \phi^C - T^k{}_{ij} \nabla_k \phi^A, \quad (\text{A.88})$$

donde

$$(F_{ij})^I{}_J(\mathbf{A}) = \partial_j (A_i)^I{}_J - \partial_i (A_j)^I{}_J + (A_i)^I{}_K (A_j)^K{}_J - (A_j)^I{}_K (A_i)^K{}_J, \quad (\text{A.89})$$

es el tensor de Riemann, el cual corresponde al tensor de stress de la teoría de campos. La derivada covariante para los índices del espacio base usan la conexión de la base.

En forma matricial la ecuación (A.89) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ij} &= \partial_i \mathbf{A}_j - \partial_j \mathbf{A}_i + \mathbf{A}_i \mathbf{A}_j - \mathbf{A}_j \mathbf{A}_i \\ &= \partial_i \mathbf{A}_j - \partial_j \mathbf{A}_i + [\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j]. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

El tensor de Riemann es invariante bajo el cambio

$$\mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}'_i = \mathbf{A}_i + \partial_i \Lambda \mathbf{I}, \quad (\text{A.91})$$

es decir

$$\mathbf{F}(\mathbf{A}') = \mathbf{F}(\mathbf{A}). \quad (\text{A.92})$$

Esto se conoce como la transformación λ de Einstein. Para la derivada covariante se obtiene

$$\nabla'_i \phi^I = e^{-\Lambda} \nabla_i \phi'^I, \quad (\text{A.93})$$

donde $\phi'^I = e^\Lambda \phi^I$.

El tensor de Riemann para una conexión $\mathbf{A} + \Delta$ se escribe como

$$\begin{aligned} (R_{ij})^I{}_J(\mathbf{A} + \Delta) &= (R_{ij})^I{}_J(\mathbf{A}) + \nabla_i (\Delta_j)^I{}_J - \nabla_j (\Delta_i)^I{}_J \\ &\quad + (\Delta_i)^I{}_K (\Delta_j)^K{}_J - (\Delta_j)^I{}_K (\Delta_i)^K{}_J \\ &\quad + 2 \Gamma^k{}_{[ij]} (\Delta_k)^I{}_J. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

Varios casos particulares están contenidos en la relación anterior. Para un campo escalar ϕ , $\mathbf{F} = 1$ en (A.87), y la conexión es \mathbf{A} , un campo vectorial. El tensor de Riemann correspondiente \mathbf{F} tiene componentes dadas por

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i, \quad (\text{A.95})$$

el cual corresponde al tensor de Maxwell para el campo electromagnético.

Para un campo vectorial \mathbf{v} , la conexión $\mathbf{\Gamma}$ es la conexión usual con componentes $\Gamma^k{}_{ij}$ y el tensor de Riemann correspondiente es el tensor de Riemann usual, a saber, (A.73).

Referencias A.

- A.01.** E. B. Christoffel, *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades*, J. reine ang. Math. **70**, 46 (1869).
- A.02.** E. B. Christoffel, *Über ein die Transformation homogener Differentialausdrücke zweiten Grades betreffendes Theorem*, J. reine ang. Math. **70**, 241 (1869).
- A.03.** R. Lipschitz, *Untersuchungen in Betreff der ganzen homogenen Funktionen von n Differentialen*, J. reine angew. Math. **70**, 71 (1869).
- A.04.** B. Riemann, *Commentatio mathematica, qua respondere tentatur quaestioni ab Ill.ma Academia Parisiense propositae: "Trouver quel doit être l'état calorifique d'un corps solide homogène indéfini pour qu'un système de courbes isothermes, à un instant donné, restent isothermes après un temps quelconque, de telle sorte que la température d'un point puisse s'exprimer en fonction du temps et de deux autres variables indépendantes."* (1876).
Este trabajo se elaboró en 1861. Como en el caso de la *Habilitationsvortrag* sólo fue publicado posteriormente, este vez, póstumamente, en 1876. Traducción al español en [A.13].
- A.05.** G. Ricci and T. Levi-Civita, *Méthodes du calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. **54**, 125 (1900).
- A.06.** T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana*, Rend. Palermo **42**, 173 (1917).
- A.07.** J. A. Schouten, *Ricci Calculus* (Springer, Berlin, 1954).
- A.08.** J. Ehlers, *Christoffel's work on the equivalence problem for Riemann spaces and its importance for modern field theories of physics*, in *E. B. Christoffel: The influence of his work on mathematics and the physical sciences*, ed. P. L. Butzer and F. Feher (Birkhäuser, Basel, 1981).
- A.09.** D. J. Struik, *Schouten, Levi-Civita, And the Emergence of Tensor Calculus*, Hist. Mod. Math. **1**, 99 (Academic Press, New York, 1989).
- A.10.** R. Farwell and C. Knee, *The missing link: Riemann's "Commentatio," differential geometry and tensor analysis*, Hist. Math. **17**, 223 (1990).
- A.11.** J. Muñoz Masqué and A. Valdés Morales, *The number of functionally independent invariants of a pseudo-Riemannian metric*, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, 7843 (1994).

- A.12.** R. Tazzioli, *Rudolf Lipschitz's work on differential geometry and mechanics*, Hist. Mod. Math. **3**, 113 (Academic Press, New York, 1994).
- A.13.** V. Tapia, *El 'Commentatio', el problema de la equivalencia de las formas cuadráticas y el análisis tensorial*, Lecturas Matemáticas **27**, 107 (2006).

Apéndice B. Geometría Riemanniana

La geometría Riemanniana está caracterizada por una forma cuadrática diferencial, es decir, está caracterizada por un tensor \mathbf{g} con componentes $g_{ij}(\mathbf{x})$ que dependen del punto del espacio.

El tensor métrico. En la geometría Riemanniana la distancia s está descrita por su valor infinitesimal ds a través de la relación

$$ds^2 = g_{ij}(\mathbf{x}) dx^i dx^j, \quad (B.01)$$

donde los coeficientes $g_{ij}(\mathbf{x})$ son las componentes del tensor métrico \mathbf{g} .

El determinante del tensor métrico está dado por

$$g = \det(g_{ij}) = \frac{1}{d!} \epsilon^{i_1 \dots i_d} \epsilon^{j_1 \dots j_d} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_d j_d}. \quad (B.02)$$

Si $g \neq 0$, entonces es posible definir el tensor métrico inverso \mathbf{g}^{-1} , o contravariante, como el tensor con componentes g^{ij} dadas por

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}. \quad (B.03)$$

Por lo tanto

$$g^{ij} = \frac{1}{(d-1)!} \frac{1}{g} \epsilon^{ii_1 \dots i_{d-1}} \epsilon^{jj_1 \dots j_{d-1}} g_{i_1 j_1} \dots g_{i_{d-1} j_{d-1}}. \quad (B.04)$$

Las componentes g^{ij} del tensor métrico contravariante \mathbf{g}^{-1} satisfacen

$$g^{ik} g_{jk} = \delta_j^i. \quad (B.05)$$

Por lo tanto, g^{ij} es el tensor matricialmente inverso a g_{ij} .

La variación de g se puede escribir como

$$\delta g = g g^{ij} \delta g_{ij}. \quad (B.06)$$

Por otra parte, la variación de (B.05) da

$$\delta g_{ik} g^{jk} + g_{ik} \delta g^{jk} = 0, \quad (B.07)$$

y entonces la ecuación (B.06) se reescribe como

$$\delta g = -g_{ij} \delta g^{ij}. \quad (B.08)$$

A partir de un vector covariante, y con el uso del tensor métrico contravariante \mathbf{g}^{-1} , se puede definir un vector contravariante, y viceversa, por medio de las relaciones

$$\begin{aligned} v_i &= g_{ij} v^j, \\ v^i &= g^{ij} v_j. \end{aligned} \quad (B.09)$$

Las operaciones descritas en (B.09) se conocen coloquialmente como “subir” y “bajar” índices.

La signatura, $\sigma = (t, s)$, del tensor métrico \mathbf{g} es el número de auto-valores positivos, t , y auto-valores negativos, s , donde $t + s = d$. Los espacios Euclidianos tienen signatura $\sigma_E = (d, 0)$. Los espacios Minkowskianos tienen signatura $\sigma_M = (1, d - 1)$. El espacio-tiempo de la Relatividad General y de otras teorías gravitacionales es un espacio con signatura Minkowskiana.

El Símbolo de Christoffel. La conexión Γ y el tensor métrico \mathbf{g} son objetos independientes. La pregunta natural es si existe una conexión que sea concomitante del tensor métrico. La respuesta es que la única conexión concomitante del tensor métrico está dada por

$$\Gamma^k_{ij} = \{^k_{ij}\}(\mathbf{g}), \quad (B.10)$$

donde

$$\{^k_{ij}\}(\mathbf{g}) = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (B.11)$$

es el símbolo de Christoffel. Se puede verificar que

$$\nabla_k^{\{\}} g_{ij} \equiv 0. \quad (B.12)$$

Por otra parte, la condición de metricidad

$$\nabla_k^{\Gamma} g_{ij} = 0, \quad (B.13)$$

tiene como única solución el símbolo de Christoffel (B.10). Usualmente el símbolo de Christoffel se obtiene resolviendo la condición de metricidad (B.13).

Un problema más general fue resuelto por Noriega (1977) quien mostró que el símbolo de Christoffel es la única conexión que se puede construir a partir de algún tensor.

Debido a (B.12) las operaciones de subida y bajada de índices (B.09) conmutan con la derivada covariante. En este sentido el tensor métrico y la derivación covariante son “transparentes” una con respecto a la otra.

Algunas contracciones interesantes de la ecuación (B.11) son las siguientes; en primer lugar se tiene

$$\{^k_{ik}\}(\mathbf{g}) = \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial g^{1/2}}{\partial x^i} \quad (B.14)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \nabla_i E^i &= \frac{\partial E^i}{\partial x^i} - \{^i_{ik}\}(\mathbf{g}) E^k = \frac{\partial E^i}{\partial x^i} - \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial g^{1/2}}{\partial x^i} E^k \\ &= \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^i} (g^{1/2} E^i). \end{aligned} \quad (B.15)$$

El Laplaciano se define como

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= g^{ij} \nabla_i \nabla_j \psi = \nabla_i (g^{ij} \nabla_j \psi) \\ &= \frac{1}{g^{1/2}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{1/2} g^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right). \end{aligned} \quad (B.16)$$

El Tensor de Riemann–Christoffel. Anteriormente se construyó el tensor de Riemann $R^l_{kij}(\Gamma)$ para una conexión genérica Γ . En la geometría Riemanniana, existe una conexión natural dada por el símbolo de Christoffel $\{^k_{ij}\}(\mathbf{g})$. Por lo tanto, un tensor de Riemann natural para la geometría Riemanniana es el tensor de Riemann para el símbolo de Christoffel. El tensor de Riemann correspondiente se denota por $R^l_{kij}(\mathbf{g})$ y está dado por

$$\begin{aligned} R^l_{kij}(\mathbf{g}) &= \partial_i \{^l_{jk}\}(\mathbf{g}) - \partial_j \{^l_{ik}\}(\mathbf{g}) \\ &\quad + \{^l_{im}\}(\mathbf{g}) \{^m_{jk}\}(\mathbf{g}) - \{^l_{jm}\}(\mathbf{g}) \{^m_{ik}\}(\mathbf{g}). \end{aligned} \quad (B.17)$$

El tensor de Ricci está dado por

$$R_{\mu\nu}(\mathbf{g}) = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}(\mathbf{g}) = \delta_\lambda^\rho R^\lambda{}_{\mu\rho\nu}(\mathbf{g}), \quad (B.18)$$

En forma explícita

$$\begin{aligned} R_{\lambda\nu}(\mathbf{g}) &= R^\rho{}_{\lambda\rho\nu}(\mathbf{g}) \\ &= \partial_\rho \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} - \partial_\nu \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \rho\lambda \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \rho\sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \nu\lambda \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} \rho \\ \nu\sigma \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} \sigma \\ \rho\lambda \end{smallmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (B.19)$$

Los resultados obtenidos en la sección C.6 se pueden aplicar a la geometría Riemanniana. En particular, dado que los símbolos de Christoffel $\left\{ \begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix} \right\}(\mathbf{g})$ son simétricos en sus sub-índices i y j [como es evidente en forma inmediata a partir de (B.1)], el tensor de torsión correspondiente se anula en forma idéntica, y en consecuencia el formalismo resultante se simplifica considerablemente. En particular, la identidad de Ricci ahora se reduce a

$$\nabla_i \nabla_j v_k - \nabla_j \nabla_i v_k = R^l{}_{lij}(\mathbf{g}) v_l. \quad (B.18)$$

Con el tensor métrico \mathbf{g} se puede construir un tensor de Riemann completamente covariante como

$$R_{kl ij}(\mathbf{g}) = g_{km} R^m{}_{lij}(\mathbf{g}). \quad (B.19)$$

En forma explícita se tiene

$$\begin{aligned} R_{ijkl}(\mathbf{g}) &= \frac{1}{2} (\partial_{ik} g_{jl} + \partial_{jl} g_{ik} - \partial_{il} g_{jk} - \partial_{jk} g_{il}) \\ &+ g_{mn} \left[\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ ik \end{smallmatrix} \right\}(\mathbf{g}) \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ jl \end{smallmatrix} \right\}(\mathbf{g}) - \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ il \end{smallmatrix} \right\}(\mathbf{g}) \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ jk \end{smallmatrix} \right\}(\mathbf{g}) \right]. \end{aligned} \quad (B.20)$$

Este objeto es el *tensor de Riemann–Christoffel*. Aquí hemos usado la notación $\partial_{ij} g_{kl} = \partial^2 g_{kl} / \partial x^i \partial x^j$ para exhibir en forma explícita las simetrías de los índices.

A menudo el tensor de Riemann–Christoffel también es llamado “tensor de Riemann”, pero es necesario tener en cuenta que un tensor de Riemann se define para una conexión genérica Γ mientras que el tensor de Riemann–Christoffel se define para un símbolo de Christoffel $\left\{ \right\}(\mathbf{g})$. La nomenclatura anterior es adecuada para evitar confusiones.

En un espacio Euclideo es posible introducir coordenadas Cartesianas, de manera tal que las componentes del tensor métrico están dadas por

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (B.21)$$

El símbolo de Christoffel y el tensor de Riemann–Christoffel se anulan ambos.

El problema inverso consiste en determinar cuándo es posible encontrar una transformación de coordenadas tales que un tensor métrico \mathbf{g} con componentes $g_{ab}(\mathbf{y})$ se pueda escribir en coordenadas Cartesianas de manera tal que las componentes del tensor métrico \mathbf{g} sean constantes. Para que ésto sea posible es necesario que

$$g_{ab}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} \eta_{ij}. \quad (B.22)$$

La condición de integrabilidad para esta ecuación es que se anule el tensor de Riemann–Christoffel.

Los espacios para los cuales se anula el tensor de Riemann–Christoffel son los *espacios planos*. Si el tensor de Riemann–Christoffel no se anula entonces el espacio no es plano. En dos dimensiones el tensor de Riemann–Christoffel posee sólo una componente independiente, el escalar de Ricci, el cual coincide con la curvatura Gaussiana de una superficie. Esta es la razón por la cual muchas veces el tensor de Riemann–Christoffel también se denomina *tensor de curvatura* y se dice que el espacio está curvado.

Identidades Algebraicas. El tensor de Riemann–Christoffel satisface las siguientes identidades algebraicas:

1. Anti-simetría en el primer y segundo par de índices

$$\begin{aligned} R_{lkij}(\mathbf{g}) &= -R_{klij}(\mathbf{g}), \\ R_{klji}(\mathbf{g}) &= -R_{kl ij}(\mathbf{g}). \end{aligned} \quad (B.23)$$

Por lo tanto, el tensor de Riemann–Christoffel, completamente covariante, es anti-simétrico en el primer par de índices como también en el segundo par de índices.

2. Simetría con respecto al primer y segundo par de índices

$$R_{kl ij}(\mathbf{g}) = R_{ij kl}(\mathbf{g}). \quad (B.24)$$

3. Simetría cíclica con respecto a tres índices

$$R_{klij}(\mathbf{g}) + R_{kijl}(\mathbf{g}) + R_{kjli}(\mathbf{g}) = 0. \quad (B.25)$$

Debido a las propiedades de simetría descritas anteriormente la única contracción no-trivial del tensor de Riemann-Christoffel con el tensor métrico es el tensor de Ricci

$$R_{kj}(\mathbf{g}) = g^{li} R_{lkij}(\mathbf{g}). \quad (B.26)$$

Se puede definir una contracción adicional del tensor de Ricci con el tensor métrico y se obtiene el escalar de Ricci

$$R(\mathbf{g}) = g^{ij} R_{ij}(\mathbf{g}). \quad (B.27)$$

El número $N(\text{Rie})$ de componentes algebraicamente independientes del tensor de Riemann-Christoffel completamente covariante (B.20) se obtiene como sigue. En primer lugar, el tensor de Riemann-Christoffel se puede considerar como una matriz cuadrada simétrica R_{AB} donde A y B son índices colectivos para $[ij]$. El rango de A es $A = 1, \dots, D = d(d-1)/2$. Por lo tanto el número de componentes de R_{AB} es

$$P = \frac{1}{2} D(D+1) = \frac{1}{2} \frac{1}{2} d(d-1) \left[\frac{1}{2} d(d-1) + 1 \right]. \quad (B.28)$$

Por otra parte, la propiedad (B.25) introduce

$$Q = \frac{d!}{(d-4)!4!} = \frac{d(d-1)(d-2)(d-3)}{24}, \quad (B.29)$$

restricciones adicionales. El resultado final es

$$N(\text{Rie}) = P - Q = \frac{d^2(d^2-1)}{12}. \quad (B.30)$$

El tensor de Ricci es simétrico y su número de componentes es

$$N(\text{Ric}) = \frac{1}{2} d(d+1). \quad (B.31)$$

El escalar de Ricci posee sólo una componente en todas las dimensiones.

El número de componentes linealmente independientes del tensor de Riemann-Christoffel y del tensor de Ricci para diferentes dimensiones se da en la Tabla B.1.

En dimensión 2 el tensor de Riemann-Christoffel posee sólo una componente independiente. De hecho se puede escribir

$$R_{klij}^{(2)} = \frac{1}{2} R^{(2)} (g_{ki} g_{lj} - g_{kj} g_{li}), \quad (B.32)$$

de modo tal que para el tensor de Ricci se obtiene

$$R_{ij}^{(2)} = \frac{1}{2} R^{(2)} g_{ij}. \quad (B.33)$$

donde $R^{(2)}$ es el escalar de Ricci.

En dimensión 3 el tensor de Riemann-Christoffel y el tensor de Ricci poseen el mismo número de componentes independientes. Por lo tanto el tensor de Riemann-Christoffel se puede escribir completamente en términos del tensor de Ricci. Se tiene

$$R_{klij}^{(3)} = [R_{ki}^{(3)} g_{lj} + g_{ki} R_{lj}^{(3)} - R_{kj}^{(3)} g_{li} - g_{kj} R_{li}^{(3)}] - \frac{1}{2} R^{(3)} (g_{ki} g_{lj} - g_{kj} g_{li}). \quad (B.34)$$

En dimensión 4 el tensor de Riemann-Christoffel tiene más componentes independientes que el tensor de Ricci. Por lo tanto el tensor de Riemann-Christoffel se escribe en términos del tensor de Ricci y de un tensor adicional \mathbf{C} . Se tiene

Dimensión	Riemann-Christoffel	Ricci
d	$d^2(d^2-1)/12$	$d(d+1)/2$
1	0	0*
2	1	1*
3	6	6
4	20	10

Tabla B.1. El número de componentes linealmente independientes del tensor de Riemann-Christoffel y del tensor de Ricci para diferentes dimensiones. (*) El tensor de Ricci no puede tener más componentes linealmente independientes que el tensor de Riemann-Christoffel.

$$R_{klij}^{(4)} = \frac{1}{2} [R_{ki}^{(4)} g_{lj} + g_{ki} R_{lj}^{(4)} - R_{kj}^{(4)} g_{li} - g_{kj} R_{li}^{(4)}] - \frac{1}{6} R^{(4)} (g_{ki} g_{lj} - g_{kj} g_{li}) + C_{klij}. \quad (B.35)$$

donde C_{klij} son las componentes del tensor de Weyl \mathbf{C} . Este tensor tiene las mismas simetrías que el tensor de Riemann–Christoffel y la propiedad adicional

$$C_{lj} = g^{ki} C_{klij} \equiv 0. \quad (B.36)$$

La relación (B.35) se puede invertir para obtener

$$C_{klij} = R_{klij}^{(4)} - \frac{1}{2} [R_{ki}^{(4)} g_{lj} + g_{ki} R_{lj}^{(4)} - R_{kj}^{(4)} g_{li} - g_{kj} R_{li}^{(4)}] + \frac{1}{6} R^{(4)} (g_{ki} g_{lj} - g_{kj} g_{li}). \quad (B.37)$$

Las identidades de Bianchi. El tensor de Riemann satisface un conjunto de identidades *diferenciales*, a saber, *las identidades de Bianchi*. La primera identidad de Bianchi está dada por

$$\nabla_k R_{mlij}(\mathbf{g}) + \nabla_i R_{mljk}(\mathbf{g}) + \nabla_j R_{mlki}(\mathbf{g}) \equiv 0. \quad (B.38)$$

A partir de una contracción se obtiene la segunda identidad de Bianchi, a saber,

$$\nabla_i R_{jk}(\mathbf{g}) - \nabla_j R_{ik}(\mathbf{g}) + \nabla_l R_{ijk}{}^l(\mathbf{g}) = 0. \quad (B.39)$$

Una contracción adicional da la tercera identidad de Bianchi

$$\nabla_i R(\mathbf{g}) - 2 \nabla_j R_i{}^j(\mathbf{g}) = 0. \quad (B.40)$$

La relación anterior se puede reescribir como

$$\nabla_j G^{ij}(\mathbf{g}) = 0, \quad (B.41)$$

donde

$$G_{ij}(\mathbf{g}) = R_{ij}(\mathbf{g}) - \frac{1}{2} R(\mathbf{g}) g_{ij}. \quad (B.42)$$

es el tensor de Einstein.

Simetrías de los espacios de Riemann. Una transformación de coordenadas $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ tal que las componentes del tensor métrico transformado $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{y})$ poseen la misma dependencia de sus argumentos \mathbf{y} que el tensor métrico original $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ con respecto a \mathbf{x} , es una simetría de los espacios de Riemann. Es decir, se cumple

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = g_{ab}(\mathbf{y}). \quad (B.43)$$

Las componentes del tensor métrico transformado están dadas por la relación

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} g_{ij}(\mathbf{x}). \quad (B.44)$$

Si el tensor métrico es invariante en su forma entonces sus componentes satisfacen

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = \frac{\partial x^i}{\partial y^a} \frac{\partial x^j}{\partial y^b} g_{ij}(\mathbf{x}). \quad (B.45)$$

La ecuación (B.45) es una restricción complicada sobre la función $\mathbf{y}(\mathbf{x})$, y se puede simplificar restringiendo las consideraciones al caso especial de una transformación infinitesimal de coordenadas

$$y^a(\mathbf{x}) = x^a + \xi^a(\mathbf{x}), \quad (B.46)$$

donde ξ es un función infinitesimal. A primer orden en ξ se tiene

$$\frac{\partial y^a}{\partial x^i} = \delta_i^a + \frac{\partial \xi^a}{\partial x^i}, \quad (B.47)$$

mientras que para la transformación inversa se tiene

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^a} = \delta_a^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial y^a}, \quad (B.48)$$

Para las componentes del tensor métrico se tiene

$$\bar{g}_{ab}(\mathbf{y}) = g_{ab}(\mathbf{x} + \xi) = g_{ab}(\mathbf{x}) + \xi^c(\mathbf{x}) \frac{\partial g_{ab}}{\partial y^c}(\mathbf{x}). \quad (B.49)$$

Reemplazando en (B.45) y simplificando se obtiene

$$\delta g_{ij} = \bar{g}_{ij}(\mathbf{y}) - g_{ij}(\mathbf{x}) = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i. \quad (B.50)$$

Por lo tanto, para que el tensor métrico no cambie se debe tener

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0. \quad (B.51)$$

La ecuación (B.51) es la ecuación de Killing y sus soluciones ξ son los vectores de Killing.

Las condiciones de integrabilidad para la ecuación de Killing se obtienen considerando la derivada covariante de la ecuación de Killing (B.51), a saber,

$$\nabla_k \nabla_i \xi_j + \nabla_k \nabla_j \xi_i = 0, \quad (B.52)$$

y la identidad de Ricci para ξ , es decir,

$$\nabla_i \nabla_j \xi_k - \nabla_j \nabla_i \xi_k = R^l{}_{kij} \xi_l. \quad (B.53)$$

Combinando ambas ecuaciones, usando la ecuación de Killing y la simetría cíclica del tensor de Riemann–Christoffel, se obtiene

$$\nabla_k \nabla_j \xi_i = R^l{}_{kij} \xi_l. \quad (B.54)$$

La derivada covariante de los vectores de Killing posee partes simétrica y anti-simétricas

$$\nabla_i \xi_j = \nabla_{(i} \xi_{j)} + \nabla_{[i} \xi_{j]}, \quad (B.55)$$

pero la parte simétrica es cero, $\nabla_{(i} \xi_{j)} = 0$, dado que es justamente la ecuación de Killing. Por lo tanto, todas las derivadas de orden superior de ξ_a , se pueden expresar en términos de $\xi_i(\mathbf{x}_0)$ y de la parte anti-simétrica de $\nabla_{[i} \xi_{j]}(\mathbf{x}_0)$, donde \mathbf{x}_0 es un punto cualquiera del espacio. De este modo, cualquier vector de Killing se puede escribir como

$$\xi_i(\mathbf{x}) = A_i{}^j(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) \xi_j(\mathbf{x}_0) + B_i{}^{jk}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0) \nabla_{[j} \xi_{k]}(\mathbf{x}_0), \quad (B.56)$$

donde $A_i{}^j(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ y $B_i{}^{jk}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_0)$ son funciones que dependen del tensor métrico particular que se esté considerando pero no de los valores iniciales ξ y $\nabla_{[i} \xi_{j]}$. Por lo tanto estas funciones son las mismas para todos los vectores de Killing.

El número máximo de vectores de Killing es igual al número de valores iniciales que se pueden dar en forma independiente, es decir, d para los ξ y $d(d-1)/2$ para los $\nabla_{[i} \xi_{j]}$, y en total se obtiene $d(d+1)/2$. Los espacios que poseen el número máximo de vectores de Killing son los *espacios máximamente simétricos*. Las condiciones de integrabilidad para la existencia del número máximo de vectores de Killing se obtienen considerando una derivada adicional de la ecuación (B.53). Con el uso de la ecuación de Killing se obtiene

$$\begin{aligned} & (\nabla_i R^m{}_{jkl} - \nabla_j R^m{}_{ikl}) \xi_m \\ & + (R^m{}_{jik} \delta_l^n + R^m{}_{klj} \delta_i^n - R^m{}_{lik} \delta_j^n - R^m{}_{ilj} \delta_k^n) \nabla_m \xi_n = 0. \end{aligned} \quad (B.57)$$

Para tener el número máximo de soluciones los datos iniciales ξ y $\nabla_{[i} \xi_{j]}$ deben ser independientes, lo cual significa que los coeficientes respectivos en la ecuación (B.57) se deben anular, es decir,

$$\nabla_i R^m{}_{jkl} - \nabla_j R^m{}_{ikl} = 0, \quad (B.58)$$

$$\begin{aligned} & R^m{}_{jik} \delta_l^n + R^m{}_{klj} \delta_i^n - R^m{}_{lik} \delta_j^n - R^m{}_{ilj} \delta_k^n \\ & - R^m{}_{jik} \delta_l^m - R^m{}_{klj} \delta_i^m + R^m{}_{lik} \delta_j^m + R^m{}_{ilj} \delta_k^m = 0. \end{aligned} \quad (B.59)$$

La condición (B.58) implica que el tensor de Riemann es de la forma

$$R_{kl ij}(\mathbf{g}) = K (g_{kl} g_{ij} - g_{kj} g_{il}), \quad (B.60)$$

mientras que la ecuación (B.59) implica $K = \text{constante}$. Los espacios para los cuales se cumple (B.60) son los *espacios máximamente simétricos*. Hay tres posibilidades dependiendo del valor de la constante K : $K = 0$, $K > 0$, $K < 0$.

El caso más sencillo es $K = 0$ y el espacio es plano. En un espacio plano siempre es posible elegir coordenadas Cartesianas en las cuales el tensor métrico es constante y la conexión se anula. En este sistema de coordenadas la ecuación (B.60) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial x^i \partial x^j} = 0, \quad (B.61)$$

cuya solución es

$$\xi_i(x) = a_i + b_{ij} x^j, \quad (B.62)$$

donde a_i y b_{ij} son constantes y b_{ij} es anti-simétrico. De esta manera se puede elegir un conjunto de $d(d+1)/2$ vectores de Killing como

$$\begin{aligned} \xi^{(j)i} &= \eta^{ji}, \\ \xi^{[jk]i} &= \eta^{ij} x^k - \eta^{ik} x^j. \end{aligned} \quad (B.63)$$

Los d vectores $\xi_i^{(j)}$ representan traslaciones, mientras que los $d(d-1)/2$ vectores $\xi_i^{[kj]}$ representan rotaciones o, para un espacio de Minkowski, transformaciones de Lorentz.

Existen otros espacios que están caracterizados por poseer sólo un grupo reducido de simetrías. Por ejemplo: los *espacios homogéneos* son aquellos que poseen como simetrías sólo las traslaciones; los *espacios isotrópicos* son aquellos que poseen como simetrías sólo las rotaciones. Las simetrías anteriores pueden estar presentes también sólo en algún sub-espacio del espacio en consideración. Por ejemplo, los espacios de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) son espacios que poseen sub-espacios tri-dimensionales máximamente simétricos.

Una propiedad adicional de los vectores de Killing es su linealidad, es decir, si ξ_α son vectores de Killing, entonces no existen funciones f^α_β tal que $E_\beta = f^\alpha_\beta \xi_\alpha$ sea un vector de Killing, aparte de la solución trivial, constantes.

Consideremos ahora los operadores diferenciales

$$T_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i, \quad (B.64)$$

donde $\alpha = 1, \dots, N$, y N es el número de vectores de Killing independientes. El conmutador de dos de estos operadores está dado por

$$[T_\alpha, T_\beta] = T_\alpha T_\beta - T_\beta T_\alpha = \xi_{[\alpha\beta]}^i \partial_i, \quad (B.65)$$

donde

$$\begin{aligned} \xi_{[\alpha\beta]}^i &= \xi_\alpha^j \frac{\partial \xi_\beta^i}{\partial x^j} - \xi_\beta^j \frac{\partial \xi_\alpha^i}{\partial x^j} \\ &= \xi_\alpha^j \nabla_j \xi_\beta^i - \xi_\beta^j \nabla_j \xi_\alpha^i. \end{aligned} \quad (B.66)$$

Se puede verificar, utilizando la ecuación de Killing y (B.66), que

$$\nabla_i \xi_{[\alpha\beta]j} + \nabla_j \xi_{[\alpha\beta]i} = 0. \quad (B.67)$$

Por lo tanto, $\xi_{[\alpha\beta]i}$ también es un vector de Killing. Dado que hemos supuesto que los ξ son todos los vectores de Killing existentes, entonces $\xi_{[\alpha\beta]i}$ debe ser una combinación lineal de los vectores de Killing ξ , es decir,

$$\xi_{[\alpha\beta]}^i = C_{\alpha\beta}{}^\gamma \xi_\gamma^i, \quad (B.68)$$

pero, debido a la propiedad de linealidad de los vectores de Killing descrita anteriormente, los C 's son constantes y la relación (B.65) se puede escribir como

$$[T_\alpha, T_\beta] = C_{\alpha\beta}{}^\gamma \xi_\gamma^i \partial_i = C_{\alpha\beta}{}^\gamma T_\gamma. \quad (B.69)$$

Las relaciones anteriores definen el grupo de simetrías del tensor métrico.

Espacios conformemente relacionados. Dos espacios están conformemente relacionados si existe un sistema de coordenadas en el cual sus tensores métricos están relacionados por

$$\bar{g}_{ij}(\mathbf{x}) = e^{\Omega(\mathbf{x})} g_{ij}(\mathbf{x}). \quad (B.70)$$

A partir de esta relación es posible expresar las propiedades del tensor métrico conforme $\bar{\mathbf{g}}$ en términos de las propiedades del tensor métrico \mathbf{g} . Los determinantes están relacionados por

$$\bar{g} = e^{d\Omega} g. \quad (B.71)$$

Los tensores métricos inversos están relacionados por

$$\bar{g}^{ij} = e^{-\Omega} g^{ij}. \quad (B.72)$$

Los símbolos de Christoffel están relacionados por

$$\{\begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix}\}(\bar{\mathbf{g}}) = \{\begin{smallmatrix} k \\ ij \end{smallmatrix}\}(\mathbf{g}) + \frac{1}{2} (\delta_i^k \Omega_j + \delta_j^k \Omega_i - g^{kl} \Omega_l g_{ij}), \quad (B.73)$$

donde $\Omega_i = \partial\Omega/\partial x^i$. Los tensores de Riemann–Christoffel están relacionados por

$$\begin{aligned}
R^k{}_{lij}(\bar{\mathbf{g}}) &= R^k{}_{lij}(\mathbf{g}) \\
&+ \frac{1}{2} (\delta_j^k \nabla_i \Omega_l - \nabla_i \Omega^k g_{jl} - \delta_i^k \nabla_j \Omega_l + \nabla_j \Omega^k g_{il}) \\
&+ \frac{1}{4} (\delta_i^k \Omega_l \Omega_j - \delta_i^k (\Omega^2) g_{jl} + \Omega^k \Omega_i g_{jl} \\
&- \delta_j^k \Omega_l \Omega_i + \delta_j^k (\Omega^2) g_{il} - \Omega^k \Omega_j g_{il}) . \quad (B.74)
\end{aligned}$$

Los tensores de Riemann–Christoffel completamente covariantes están relacionados por

$$\begin{aligned}
R_{klij}(\bar{\mathbf{g}}) &= e^\Omega [R_{klij}(\mathbf{g}) \\
&+ \frac{1}{2} (g_{kj} \nabla_i \Omega_l - \nabla_i \Omega_k g_{jl} - g_{ki} \nabla_j \Omega_l + \nabla_j \Omega_k g_{il}) \\
&+ \frac{1}{4} (g_{ki} \Omega_l \Omega_j - g_{ki} (\Omega^2) g_{jl} + \Omega_k \Omega_i g_{jl} \\
&- g_{kj} \Omega_l \Omega_i + g_{kj} (\Omega^2) g_{il} - \Omega_k \Omega_j g_{il})] , \quad (B.75)
\end{aligned}$$

donde $(\Omega^2 = g^{ij} \Omega_i \Omega_j)$. Los tensores de Ricci están relacionados por

$$\begin{aligned}
R_{ij}(\bar{\mathbf{g}}) &= R_{ij}(\mathbf{g}) \\
&- \frac{1}{2} [(d-2) \nabla_i \Omega_j + (\nabla^2 \Omega) g_{ij}] \\
&+ \frac{1}{4} (d-2) [\Omega_i \Omega_j - (\Omega^2) g_{ij}] . \quad (B.76)
\end{aligned}$$

Las curvaturas escalares están relacionadas por

$$R(\bar{\mathbf{g}}) = e^{-\Omega} \left[R(\mathbf{g}) - (d-1) (\nabla^2 \Omega) - \frac{1}{4} (d-1) (d-2) (\Omega^2) \right] , \quad (B.77)$$

donde $(\nabla^2 \Omega) = g^{ij} \nabla_i \nabla_j \Omega$. Para el tensor de Weyl se obtiene

$$C_{klij}(\bar{\mathbf{g}}) = e^\Omega C_{klij}(\mathbf{g}) . \quad (B.78)$$

Un espacio es *conformemente plano* si existe un sistema de coordenadas en el cual las componentes del tensor métrico se pueden escribir como

$$g_{ij} = e^\Omega \overset{0}{g}_{ij} , \quad (B.79)$$

donde $\overset{0}{\mathbf{g}}$ es un tensor métrico plano.

El problema inverso consiste en determinar cuándo un espacio es conformemente plano, y es equivalente a determinar cuándo existe una función Ω tal que

$$h_{ij} = e^\Omega g_{ij} , \quad (B.80)$$

es un tensor métrico plano. La condición es que se anule el tensor de Riemann–Christoffel para el tensor métrico \mathbf{h} . Esta condición tiene distintas expresiones dependiendo de la dimensión del espacio que se esté considerando.

Para $d = 3$ la condición es

$$R_{ij} = \frac{1}{2} [\nabla_i \Omega_j + (\nabla^2 \Omega) g_{ij}] - \frac{1}{4} [\Omega_i \Omega_j - (\Omega^2) g_{ij}] . \quad (B.81)$$

Para $d = 4$ es necesario que

$$\begin{aligned}
&R_{klij} \\
&+ \frac{1}{2} [g_{kj} \nabla_i \Omega_l - \nabla_i \Omega_k g_{jl} - g_{ki} \nabla_j \Omega_l + \nabla_j \Omega_k g_{il}] \\
&+ \frac{1}{4} [g_{ki} \Omega_l \Omega_j - g_{ki} (\Omega^2) g_{jl} + \Omega_k \Omega_i g_{jl} \\
&- g_{kj} \Omega_l \Omega_i + g_{kj} (\Omega^2) g_{il} - \Omega_k \Omega_j g_{il}] = 0 . \quad (B.82)
\end{aligned}$$

Una contracción de esta ecuación da

$$\begin{aligned}
R_{ij} - \frac{1}{2} [(d-2) \nabla_i \Omega_j + (\nabla^2 \Omega) g_{ij}] \\
+ \frac{1}{4} (d-2) [\Omega_i \Omega_j - (\Omega^2) g_{ij}] = 0 . \quad (B.83)
\end{aligned}$$

Una segunda contracción da

$$R(\mathbf{g}) - (d-1)(\nabla^2\Omega) - \frac{1}{4}(d-1)(d-2)(\Omega^2) = 0. \quad (B.84)$$

Combinando las condiciones anteriores se llega a que la condición de integrabilidad para (B.82) es un tensor de Weyl nulo.

Con el tensor métrico es posible definir normas, productos internos y ángulos. La norma de un vector está dada por

$$N^2(\mathbf{v}) = g_{ij} v^i v^j. \quad (B.85)$$

El producto interno de dos vectores está dado por

$$N(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij} v^i w^j. \quad (B.86)$$

El ángulo entre dos vectores está dado por

$$\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{N(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{N(\mathbf{v})N(\mathbf{w})}. \quad (B.87)$$

Las transformaciones de escala del tipo $\mathbf{g} \rightarrow \Omega\mathbf{g}$ no cambian el valor de los ángulos (B.87), y por lo tanto, estas son transformaciones conformes. De acuerdo con las ecuaciones (B.50), se debe tener

$$\delta g_{ij} = \nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = \alpha g_{ij}. \quad (B.88)$$

Esto significa que la nuevo tensor métrico está dado por

$$\bar{g}_{ij} = (1 + \alpha) g_{ij}. \quad (B.89)$$

Para las transformaciones conformes se debe tener

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i - \alpha g_{ij} = 0. \quad (B.90)$$

Tomando la traza de esta ecuación se puede determinar α y se obtiene la ecuación de Killing conforme, a saber,

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i - \frac{2}{d} (\nabla_k \xi^k) g_{ij} = 0. \quad (B.91)$$

La técnica para encontrar las soluciones a esta ecuación es la misma descrita anteriormente para la ecuación de Killing ordinaria.

La solución general de (B.91) está dada por

$$\xi^i(x) = a^i + b^i_j x^j + kx^i + x^2 b^i - 2(b \cdot x) x^i, \quad (B.92)$$

donde b^{ij} es anti-simétrico. Esta solución representa traslaciones, rotaciones, transformaciones de escala y transformaciones conformes especiales infinitesimales.

Referencias B

B.01. B. Riemann, *Über die hypothesen welche der Geometrie zu Grunde Liegen* (1854).

Esta tesis fue presentada el 10 de Junio de 1854 en la Facultad de Filosofía de Göttingen. Fue publicada en *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* **13**, 133 (1868). A este trabajo generalmente se le asigna esta última fecha para no crear confusión con respecto a la tardía influencia del trabajo de Riemann sobre la geometría del siglo XIX. El trabajo original ha sido reimpresso en [05.A1]. Existen varias traducciones al inglés que se pueden encontrar en:

○ W. K. Clifford, *Nature* **7**, 14–17, 36, 37, 183–184 (1873).

Esta traducción fue publicada en forma completa en:

○ W. K. Clifford, *Mathematical Papers* (MacMillan, London, 1882).

Otras traducciones al inglés se pueden encontrar en:

○ H. S. White, in *A Source Book of Mathematics* (McGraw–Hill, New York, 1929).

○ M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Publish or Perish, Houston, 1979).

Traducciones al español se pueden encontrar en (Vidal, 1958; Tapia, 2002).

B.02. L. P. Eisenhart, *Symmetric tensors of the second order whose first covariant derivatives are zero*, Trans. Am. Math. Soc. **25**, 297 (1923).

B.03. P. Franklin, *Tensors of given types in Riemann space*, Phil. Mag. **45**, 1009 (1923).

B.04. E. Cartan, *La géométrie des espaces de Riemann* (Gauthier–Villars, Paris, 1926).

B.05. L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Princeton University Press, Princeton, 1926)

- B.06.** H. Levy, *Symmetric tensors of the second order whose covariant derivatives vanish*, Ann. Math. **27**, 91 (1926).
- B.07.** E. T. Bell, *Anima Candida*, in E. T. Bell, *Men of Mathematics* (Simon and Schuster, New York, 1937).
- B.08.** C. E. Weatherburn, *Riemannian Geometry and the Tensor calculus* (Cambridge, 1938).
- B.09.** E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* (Gauthier–Villars, Paris, 1946).
- B.10.** E. Vidal A., *Estado actual, métodos y problemas de la geometría diferencial*, Revista de Matemática Hispano Americana **18**, 28 (1958).
- B.11.** E. Portnoy, *Riemann's contribution to differential geometry*, Hist. Mat. **9**, 1 (1982).
- B.12.** E. Scholz, *Herbart's influence on Bernhard Riemann*, Hist. Mat. **9**, 413 (1982).
- B.13.** J. D. Zunf, *Some comments on Riemann's contributions to differential geometry*, Hist. Mat. **10**, 84 (1983).
- B.14.** G. Nowak, *Riemann's 'Habilitationsvortrag' and the synthetic 'a priori' status of geometry*, in *The history of modern mathematics* **1**, 17 (Academic Press, Boston, 1989).
- B.15.** M. Do Carmo, *Riemannian Geometry* (Birkhauser, Boston, 1992).
- B.16.** K. Maurin, *The Riemann Legacy: Riemannian Ideas in Mathematics and Physics* (Kluwer, Dordrecht, 1997).
- B.17.** D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866: Turning Points in the Conception of Mathematics* (Birkhäuser, Boston, 1999).
- B.18.** A. J. Di Scala, *On an assertion in Riemann's Habilitationsvortrag*, L'Enseignement Mathématique **47**, 57 (2001).
- B.19.** V. Tapia, *Riemann y los fundamentos de la geometría*, Miscelánea Matemática **36**, 1 (2002).
- B.20.** J. Ferreirós, *Riemann's Habilitationsvortrag at the crossroads of mathematics, physics, and philosophy*, in *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*, eds. J. Ferreirós and Jeremy Gray (Oxford University Press, 2006), p. 73.

Apéndice C. Formulación Variacional de la Mecánica

El Formalismo Lagrangiano. Consideremos sistemas dinámicos descritos por un conjunto de variables q^i . Estas variables son las variables de configuración y definen el espacio de configuración. El estado del sistema está caracterizado por los valores de estas variables, es decir, por un punto en el espacio de configuración.

El estado del sistema puede cambiar con el tiempo y este cambio se puede caracterizar a través de $q^i(t)$. Esta dependencia con el tiempo da la trayectoria del sistema en el espacio de configuración.

Los sistemas dinámicos Lagrangianos son aquellos en los cuales las ecuaciones dinámicas se pueden obtener a partir de un principio variacional.

La dinámica de un sistema Lagrangiano está descrita por la acción S la cual está dada por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (C.01)$$

donde $T = [t_1, t_2]$ es un intervalo de tiempo finito y L es el Lagrangiano, el cual está dado por

$$L = L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}), \quad (C.02)$$

El principio variacional establece que las trayectorias del sistema son aquellas que minimizan la acción. Para determinar estas trayectorias consideremos una variación arbitraria η de las variables de configuración \vec{q} dentro del intervalo T . A saber

$$q^i = q_0^i + \eta^i. \quad (C.03)$$

En forma similar, las derivadas temporales cambian de acuerdo con la ley

$$\dot{q}^i = \dot{q}_0^i + \dot{\eta}^i. \quad (C.04)$$

En las relaciones anteriores hemos denotado la variación de las variables de configuración por η para enfatizar que este es un cambio intrínseco en el valor de estas variables y no una variación debida a otros factores, lo cual se denotaría en forma más conveniente por η .

A continuación podemos considerar el efecto de la variación (C.03) y (C.04) sobre la acción. Considerando términos a primer orden se obtiene

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \right) \eta^i + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \dot{\eta}^i \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\delta L}{\delta q^i} \right) \eta^i dt + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \eta^i \Big|_{t_1}^{t_2},\end{aligned}\quad (C.05)$$

donde hemos integrado por partes, y

$$\frac{\delta L}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right), \quad (C.06)$$

es la derivada de Euler–Lagrange. En la fórmula anterior es correcto escribir δS dado que este es el cambio experimentado por la acción por efecto de un cambio en \vec{q} .

Las trayectorias que minimizan la acción se obtienen imponiendo la condición $\delta S = 0$. Para determinar los efectos de esta condición observemos que la integral en (C.05) depende de los valores de η en el interior del intervalo T , mientras que el segundo término depende de los valores de η en t_1 y en t_2 . Por lo tanto, ambos términos se deben anular por separado. Dado que las variaciones η son arbitrarias, se debe tener

$$\frac{\delta L}{\delta q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) = 0, \quad (C.07)$$

lo cual corresponde a las ecuaciones de Euler–Lagrange o ecuaciones de movimiento. Además se debe tener

$$\begin{aligned}\eta^i(t_1) &= 0, \\ \eta^i(t_2) &= 0.\end{aligned}\quad (C.08)$$

Por lo tanto, para integrar las ecuaciones de Euler–Lagrange (C.07) se deben dar, como datos iniciales los valores de \vec{q} en t_1 y t_2 , o los valores de \vec{q} y $\dot{\vec{q}}$ en t_1 (o t_2). Sin embargo, ambos problemas pueden ser no equivalentes; véase **2.03**.

De esta manera, las ecuaciones de Euler–Lagrange (C.07) sujetas a las condiciones de contorno (C.09) son las condiciones para que la acción S sea estacionaria.

El número de valores iniciales linealmente independientes que se puede dar es $I = 2n$. El número de grados de libertad se define como

$f = I/2$, y en el caso que estamos considerando se tiene $f = n$. Dado que este número es finito estos sistemas se llaman *discretos*.

Finalmente, recordemos el siguiente resultado importante.

Teorema. *La condición necesaria y suficiente para que la derivada variacional sea nula es que el Lagrangiano sea una derivada temporal total.*

Sistemas $T - V$. Un ejemplo de aplicación del formalismo Lagrangiano es provisto por la mecánica de Newton. La dinámica de un sistema mecánico está descrita por la Segunda Ley de Newton, que en coordenadas Cartesianas se escribe simplemente como

$$m \ddot{q}^i = \delta^{ij} F_j(q), \quad (C.09)$$

donde q^i , $i = 1, \dots, n$, son coordenadas en el espacio de configuración; $\delta^{ij} = \text{diag}(+\dots+)$ es la métrica Euclideana. Un caso particular de sistema mecánico Newtoniano son los sistemas conservativos en que la fuerza es derivable de un potencial $V = V(q)$, en cuyo caso se tiene

$$F_j = -\frac{\partial V}{\partial q^j}, \quad (C.10)$$

de modo tal que (C.10) se reescribe como

$$m \ddot{q}^i = -\delta^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^j}. \quad (C.11)$$

Lo que hace a los sistemas mecánicos Newtonianos conservativos tan interesantes es el hecho que las ecuaciones (C.11) se pueden reescribir en la forma (C.07) si se considera el Lagrangiano

$$L = T - V, \quad (C.12)$$

con

$$T = \frac{1}{2} m \delta_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (C.13)$$

la energía cinética. Debido a la expresión del Lagrangiano (C.12) estos sistemas son llamados $T - V$. Casi todos los sistemas mecánicos son de este tipo y de hecho fue este el origen del formalismo Lagrangiano. Sin embargo, el formalismo Lagrangiano es mucho más general y su validez va más allá de los simples sistemas $T - V$.

Por otro lado, uno puede bien considerar la posibilidad de trabajar en un sistema de coordenadas no-Cartesiano en cuyo caso el término cinético en (C.13) se reescribe como

$$T = \frac{1}{2} m g_{ij}(\vec{q}) \dot{q}^i \dot{q}^j. \quad (C.14)$$

Las ecuaciones de movimiento correspondientes ahora son

$$m a^i = -g^{ij} \frac{\partial V}{\partial q^j}, \quad (C.15)$$

donde, ahora

$$a^i = \ddot{q}^i + \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} (\mathbf{g}) \dot{q}^j \dot{q}^k, \quad (C.16)$$

es la aceleración generalizada, y $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} (\mathbf{g})$ es el símbolo de Christoffel correspondiente a la métrica \mathbf{g} con componentes g_{ij} .

Covariancia del Formalismo Lagrangiano. Una de las ventajas del formalismo Lagrangiano es que lleva a un procedimiento simple y directo para escribir las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico dado en términos de un sistema arbitrario de coordenadas en el espacio de configuración. Dado que el formalismo Lagrangiano se construye en términos de coordenadas genéricas sus resultados y predicciones deben ser independientes del sistema coordenado usado. Esto significa que las ecuaciones de movimiento, a partir de las cuales se extrae toda la información relevante deben ser invariantes bajo transformaciones de coordenadas del espacio de configuración. Por lo tanto, bajo una transformación de coordenadas del espacio de configuración el nuevo Lagrangiano debe dar origen a la misma dinámica.

Una transformación genérica de coordenadas lleva desde las coordenadas \vec{q} a nuevas coordenadas \vec{q} que son n funciones independientes de las coordenadas originales

$$Q^i = Q^i(\vec{q}). \quad (C.17)$$

La condición necesaria y suficiente para que esta transformación esté bien definida es que su matriz Jacobiana

$$J^i_j(\vec{q}, \vec{q}) = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}, \quad (C.18)$$

sea invertible, es decir, regular, y por lo tanto su determinante debe ser distinto de cero

$$J = \det(J^i_j) \neq 0. \quad (C.19)$$

La derivada temporal de (C.17) nos da

$$\dot{Q}^i = \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \dot{q}^j, \quad (C.20)$$

de modo tal que las velocidades transforman en forma homogénea. Por lo tanto, para las velocidades se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{Q}^i}{\partial \dot{q}^j} &= \frac{\partial Q^i}{\partial q^j}, \\ \frac{\partial \dot{Q}^i}{\partial q^j} &= \frac{\partial^2 Q^i}{\partial q^j \partial q^k} \dot{q}^k. \end{aligned} \quad (C.21)$$

Usando todos estos resultados se obtiene que la derivada de Euler-Lagrange transforma como

$$\frac{\delta L}{\delta Q^i} = \frac{\partial q^j}{\partial Q^i} \frac{\partial L}{\partial q^j}. \quad (C.22)$$

Por lo tanto, la validez de las ecuaciones de Euler-Lagrange en un sistema de coordenadas implica la validez en cualquier otro sistema de coordenadas.

Todos los desarrollos posteriores deben exhibir esta invariancia y esto se usará como un ‘criterio de calidad’ para varios desarrollos posteriores.

El Formalismo Hamiltoniano. La motivación principal para desarrollar el formalismo Hamiltoniano es reescribir las ecuaciones de Euler-Lagrange, de segundo orden, en una manera que involucrara sólo derivadas de primer orden.

El punto de partida del formalismo Hamiltoniano es la introducción de los momentos \vec{p} , canónicamente conjugados a las coordenadas \vec{q} , a través de

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (C.23)$$

En términos de los momentos \vec{p} las ecuaciones de Euler–Lagrange se reescriben como

$$\dot{p}^i = \frac{\partial L}{\partial q^i} = \dot{p}_i(\vec{q}, \vec{p}). \quad (C.24)$$

Las ecuaciones (C.23) y (C.24) son un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para \vec{q} y \vec{p} y por lo tanto hemos logrado el propósito de reescribir las ecuaciones de Euler–Lagrange de segundo orden en una forma de primer orden.

Nuestra siguiente tarea es obtener una descripción variacional de las ecuaciones anteriores. Esto se puede conseguir con la introducción del Hamiltoniano H lo cual se hace a través de la transformada de Legendre

$$H = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - L. \quad (C.25)$$

Una de las propiedades notables del Hamiltoniano es que posee la dependencia $H = H(\vec{q}, \vec{p})$. Para verificar esto reescribamos (C.25) como

$$H = \dot{q}^i p_i - L, \quad (C.26)$$

y consideremos la forma diferencial de esta relación

$$dH = d\dot{q}^i p_i + \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i. \quad (C.27)$$

Si ahora utilizamos la definición del momento (C.23) la relación anterior se reduce a

$$dH = \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i, \quad (C.28)$$

lo cual significa que

$$H = H(\vec{q}, \vec{p}). \quad (C.29)$$

Por lo tanto, podemos concluir que \vec{q} y \vec{p} son las variables dinámicas fundamentales del formalismo Hamiltoniano y corresponden a las coordenadas del espacio de fase. Usualmente al hablar de Hamiltoniano se entiende esta función escrita en términos de \vec{q} y \vec{p} .

A partir de las ecuaciones (C.28) se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q^i} &= -\frac{\partial L}{\partial q^i}, \\ \frac{\partial H}{\partial p_i} &= \dot{q}^i. \end{aligned} \quad (C.30)$$

Estas relaciones permiten reescribir las ecuaciones de Euler–Lagrange en una forma de primer orden. De hecho usando (C.07) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \end{aligned} \quad (C.31)$$

Estas son las ecuaciones de Hamilton y son equivalentes a las ecuaciones de Euler–Lagrange.

El Paréntesis de Poisson. Como lo mencionáramos anteriormente las variables fundamentales del formalismo Hamiltoniano son \vec{q} y \vec{p} . Por lo tanto, cualquier función relevante deberá estar escrita en término de estas variables, es decir $F = F(\vec{q}, \vec{p})$. La evolución temporal de esta cantidad está determinada por su derivada con respecto a t , y se obtiene

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i. \quad (C.32)$$

Si utilizamos las ecuaciones de Hamilton esta ecuación se puede reescribir como

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\}, \quad (C.33)$$

donde hemos utilizado el paréntesis de Poisson $\{, \}$ definido como

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q^i} \frac{\partial F}{\partial p_i}. \quad (C.34)$$

El paréntesis de Poisson posee las siguientes propiedades:

1. *antisimetría*

$$\{F, G\} = -\{G, F\}, \quad (C.35a)$$

2. *regla de Leibniz* (es una derivación)

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G, \quad (C.35b)$$

3. *linearidad*

$$\{aF + bG, H\} = a\{F, H\} + b\{G, H\}. \quad (C.35c)$$

4. *identidad de Jacobi*

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0. \quad (C.35d)$$

El paréntesis de Poisson para las variables canónicas está dado por

$$\{q^i, p_j\} = \delta_j^i. \quad (C.36)$$

Esto permite definir una nueva estructura sobre el espacio de fase conocida como geometría simpléctica.

Leyes de Conservación. En primer lugar recordemos que la solución a las ecuaciones de movimiento se puede escribir en término de los datos iniciales como

$$\begin{aligned} q^i &= q^i(t, \vec{q}_0, \dot{\vec{q}}_0), \\ \dot{q}^i &= \dot{q}^i(t, \vec{q}_0, \dot{\vec{q}}_0). \end{aligned} \quad (C.37)$$

Estas relaciones se pueden invertir para dar

$$\begin{aligned} \vec{q}_0 &= \vec{q}_0(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}), \\ \dot{\vec{q}}_0 &= \dot{\vec{q}}_0(t, \vec{q}, \dot{\vec{q}}). \end{aligned} \quad (C.38)$$

Por lo tanto, se puede estar seguro acerca de la existencia de $2n$ constantes del movimiento que dependen explícitamente del tiempo. También se puede eliminar el tiempo a partir de estas relaciones y se tendrían $(2n - 1)$ constantes de movimiento sin dependencia explícita del tiempo. De una u otra manera uno está seguro de la existencia de cantidades conservadas y el problema se transforma en como encontrar esas cantidades.

Si $Q = Q(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ es una constante de movimiento entonces debe satisfacer la siguiente relación

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial Q}{\partial \dot{q}^i} \ddot{q}^i = 0. \quad (C.39)$$

Las segundas derivadas \ddot{q} se pueden obtener a partir de las ecuaciones de movimiento (C.07).

Las ecuaciones de movimiento son ecuaciones diferenciales. Por lo tanto, resolverlas significa integrarlas, es decir, encontrar un número suficientemente grande de constantes de movimiento.

Una cantidad conservada particularmente sencilla se obtiene contrayendo las ecuaciones de Euler–Lagrange (C.07) con q^i . Se obtiene

$$\frac{dE}{dt} = 0, \quad (C.40)$$

donde

$$E = \dot{q}^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}. \quad (C.41)$$

No obstante, es necesario disponer de un método más sistemático para obtener cantidades conservadas.

El problema de las cantidades conservadas adquiere una dimensión diferente en el formalismo Hamiltoniano. Supongamos que hemos sido capaces de encontrar un conjunto de cantidades conservadas $Q_a(\vec{p}, \vec{q})$, $a = 1, \dots, m$. Si los Q 's son cantidades conservadas, entonces deben satisfacer la siguiente relación

$$\frac{dQ_a}{dt} = \{Q_a, H\} = 0. \quad (C.00)$$

A continuación podemos considerar el paréntesis de Poisson de dos cantidades conservadas, $C_{ab}(\vec{q}, \vec{p}) = \{Q_a, Q_b\}$. Si evaluamos la derivada temporal de esta cantidad, y utilizamos la identidad de Jacobi se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{dC_{ab}}{dt} &= \{C_{ab}, H\} = \{\{Q_a, Q_b\}, H\} \\ &= -\{\{Q_b, H\}, Q_a\} + \{\{H, Q_a\}, Q_b\} = 0. \end{aligned} \quad (C.01)$$

Por lo tanto, el paréntesis de Poisson de dos cantidades conservadas también es una cantidad conservada. Si uno no conoce todas las cantidades conservadas entonces es posible generar nuevas cantidades conservadas a partir de dos conocidas. Por supuesto que no es siempre posible generar todas las cantidades conservadas a través de este procedimiento, pero esto puede ser de ayuda.

Supongamos ahora que hemos encontrado todas las posible cantidades conservadas. El paréntesis de Poisson de dos de estas cantidades también será una cantidad conservada. Sin embargo, dado que hemos supuesto que ya hemos encontrado todas las cantidades conservadas, esta nueva cantidad conservada debe ser una combinación lineal de las cantidades conservadas ya conocidas, es decir:

$$\{Q_a, Q_b\} = C_{ab}{}^c Q_c. \quad (C.02)$$

Las relaciones (C.xx) definen el álgebra de cantidades conservadas y $C_{ab}{}^c$ son las constantes de estructura del grupo correspondiente.

Todo lo que hemos descrito hasta ahora son propiedades generales de las cantidades conservadas y todavía no hemos realmente enfrentado el problema de cómo encontrar cantidades conservadas. Una respuesta sistemática, aunque parcial la entrega el teorema de Noether.

El Teorema de Noether. El Teorema de Noether (1918) es la manera más sistemática de obtener cantidades conservadas y una manera de obviar las dificultades que se encuentran al intentar integrar en forma directa la ecuación (C.39). A continuación consideraremos transformaciones infinitesimales de coordenadas que tienen la propiedad de que dejan inalteradas las ecuaciones de Euler–Lagrange. Estas transformaciones son de la forma

$$q^i \rightarrow q^i + \xi^i(\vec{q}). \quad (C.42)$$

En forma concomitante las velocidades transforman como

$$\dot{q}^i \rightarrow \dot{q}^i + \dot{\xi}^i(\vec{q}), \quad (C.43)$$

donde

$$\dot{\xi}^i = \dot{q}^j \frac{\partial \xi^i}{\partial q^j}. \quad (C.44)$$

El Lagrangiano transformado, a primer orden en ξ 's, está dado por

$$L_\xi = L(\vec{q} + \xi) = L(\vec{q}) + \Delta_\xi L. \quad (C.45)$$

donde

$$\Delta_\xi L = \frac{\partial L}{\partial q^i} \xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\xi}^i. \quad (C.46)$$

Para que la variación del Lagrangiano se anule se debe tener

$$\Delta_\xi L = L(\vec{q} + \xi) - L(\vec{q}) = 0. \quad (C.47)$$

Esta condición es equivalente a

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} \xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\xi}^i = 0. \quad (C.48)$$

Por lo tanto, para que exista una simetría de las ecuaciones de Euler–Lagrange, debe existir una solución de la ecuación (C.48). Esto es posible sólo si el Lagrangiano posee alguna forma funcional particular, dado que la ecuación (C.48) no tiene solución en general.

Consideremos a continuación la cantidad

$$Q(\xi) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \xi^i. \quad (C.49)$$

La derivada temporal de esta cantidad está dada por

$$\frac{dQ(\xi)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \xi^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \dot{\xi}^i = -\xi^i \frac{\delta L}{\delta q^i} + \Delta_\xi L, \quad (C.50)$$

donde $\Delta_\xi L$ está dado por (C.46). Esta cantidad se conservará si se cumplen dos condiciones: primero, que se satisfagan las ecuaciones de movimiento y, segundo, que ξ sea una simetría de las ecuaciones de movimiento, es decir,

$$\Delta_\xi L = 0, \quad (C.51)$$

Este último resultado usualmente se establece en la forma de un teorema

Teorema. *Si ξ es el generador de una simetría del Lagrangiano, entonces $Q(\xi)$ es una cantidad conservada.*

Este resultado se conoce como el teorema de Noether.

El problema se ha reducido ahora a determinar las transformaciones (C.42) que dejan invariante al Lagrangiano y esto obviamente dependerá de la forma funcional del Lagrangiano considerado. Consideremos un ejemplo.

El teorema de Noether adquiere una forma especialmente relevante en el formalismo Hamiltoniano. En este caso las cantidades conservadas tipo Noether se escriben como

$$Q_a = \xi_a^i p_i - \Lambda. \quad (C.52)$$

El paréntesis de Poisson de dos cantidades conservadas está dado por

$$\{Q_a, Q_b\} = \left[\xi_b^j \frac{\partial \xi_a^i}{\partial q^j} - \xi_a^j \frac{\partial \xi_b^i}{\partial q^j} \right] p_i. \quad (C.53)$$

Es posible demostrar que la cantidad anterior también es una simetría tipo Noether del Lagrangiano, por lo tanto debe ser una combinación lineal de las simetrías ya conocidas

$$\xi_b^j \frac{\partial \xi_a^i}{\partial q^j} - \xi_a^j \frac{\partial \xi_b^i}{\partial q^j} = C_{ab}^c \xi_c^i. \quad (C.54)$$

Por lo tanto, tendremos

$$\{Q_a, Q_b\} = C_{ab}^c Q_c. \quad (C.55)$$

Sistemas Puramente Cinéticos. Una familia de sistemas para la cual el problema de las cantidades conservadas tiene una formulación matemática clara es para Lagrangianos puramente cinéticos. Estas consideraciones se pueden extender a espacios Riemannianos curvos. En este caso, el problema de determinar las constantes de movimiento es equivalente a determinar los vectores, y tensores, de Killing de la métrica.

Consideremos un sistema dinámico descrito por el Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (C.56)$$

donde x^i , $i = 1, c \dots, d$, son las coordenadas generalizadas y d es la dimensión del espacio de configuración. Los puntos denotan derivadas con respecto al tiempo t . Las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\frac{\delta L}{\delta x^i} = -m g_{ij} [\ddot{x}^j + \Gamma^k_{kl} \dot{x}^k \dot{x}^l] = 0, \quad (C.57)$$

donde

$$\Gamma^k_{ij}(\mathbf{g}) = \frac{1}{2} g^{kl} \left[\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right], \quad (C.58)$$

son los símbolos de Christoffel para la métrica g_{ij} ; g^{ij} es la métrica inversa. Las ecuaciones anteriores corresponden a la ecuación de una geodésica.

Las constantes de movimiento deben satisfacer

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i = 0. \quad (C.59)$$

Con el uso de la ecuación (C.57) se obtiene

$$\frac{\partial Q}{\partial x^i} \dot{x}^i - \frac{\partial Q}{\partial \dot{x}^i} \Gamma^i_{jk} \dot{x}^j \dot{x}^k = 0. \quad (C.60)$$

Esta ecuación es homogénea en las velocidades; por lo tanto, la solución general a la ecuación (C.59) es de la forma

$$Q = Q_0(\mathbf{x}) + Q_i(\mathbf{x}) \dot{x}^i + Q_{ij}(\mathbf{x}) \dot{x}^i \dot{x}^j + \dots. \quad (C.61)$$

Reemplazando (C.60) en (C.59) se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_0}{\partial x^i} + \frac{1}{2} (\nabla_i Q_j + \nabla_j Q_i) \dot{x}^i \dot{x}^j \\ & + \frac{1}{3} (\nabla_i Q_{jk} + \nabla_j Q_{ki} + \nabla_k Q_{ij}) \dot{x}^i \dot{x}^j \dot{x}^k + \dots = 0, \end{aligned} \quad (C.62)$$

donde ∇ denota la derivada covariante con respecto a la métrica g_{ij} definida como

$$\nabla_i v_j = \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \Gamma^k_{ij} v_k. \quad (C.63)$$

La ecuación (C.61) se debe satisfacer orden a orden; por lo tanto, se obtienen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_0}{\partial x^i} &= 0, \\ \nabla_i Q_j + \nabla_j Q_i &= 0, \\ \nabla_i Q_{jk} + \nabla_j Q_{ki} + \nabla_k Q_{ij} &= 0.\end{aligned}\quad (C.64)$$

La primera ecuación implica $Q_0 = \text{constante}$. La segunda ecuación implica que los Q_i son vectores de Killing de la métrica \mathbf{g} . Las otras funciones son vectores de Killing.

Por lo tanto, las constantes de movimiento, no triviales, están dadas por

$$\begin{aligned}Q &= \xi_i \dot{x}^i, \\ Q &= \xi_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j.\end{aligned}\quad (C.65)$$

Por lo tanto, la determinación de las constantes de movimiento se reduce a la determinación de los vectores, y tensores, de Killing de la métrica \mathbf{g} .

Una constante de movimiento se puede obtener en forma inmediata. de hecho, la métrica es ella misma un tensor de Killing; por lo tanto, se obtiene la cantidad conservada

$$E = \frac{1}{2} m g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j, \quad (C.66)$$

que corresponde a la energía cinética.

Sistemas con Potenciales. Para el Lagrangiano $T-V$ la variación de Noether (C.45) está dada por

$$\xi(L) = \frac{m}{2} (\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i) \dot{q}^i \dot{q}^j - \xi^i \frac{\partial V}{\partial q^i}. \quad (C.67)$$

Para que esta cantidad sea cero, los términos que contienen distintas potencias de las velocidades deben ser cero en forma separada. A partir del primer término en (C.67) se obtiene

$$\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i = 0. \quad (C.68)$$

Por lo tanto ξ debe ser un vector de Killing de la métrica \mathbf{g} . Si suponemos que \mathbf{g} es una métrica plana entonces esta debe admitir el número máximo

de vectores de Killing. En coordenadas Cartesianas estas corresponden a traslaciones:

$$\xi_{(j)}{}^i = \delta_j^i, \quad (C.69a)$$

y a rotaciones:

$$\xi_{(j)}{}^i = \delta^{ik} \epsilon_{jkl} q^l. \quad (C.69b)$$

Por lo tanto los Q 's están dados por momentos lineales:

$$Q_j = m \delta_{ji} \dot{q}^i, \quad (C.70a)$$

y momentos angulares

$$Q_j = m \epsilon_{jik} q^i \dot{q}^k. \quad (C.70b)$$

Todavía es necesario satisfacer la segunda relación en (C.67), es decir

$$\xi^i \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0, \quad (C.71)$$

y esto disminuye el número de posibles simetrías. Obviamente estas restricciones adicionales dependerán de la forma funcional del potencial; Tabla C.1.

Desafortunadamente, existen otras cantidades conservadas que no se pueden obtener de esta manera tan sistemática. Como ejemplo basta mencionar la energía (C.xx). Esto muestra que no todas las cantidades conservadas se pueden obtener a través del teorema de Noether.

V	generadores	número	simetría
constante	todos	6	total
$V(r)$	L_x, L_y, L_z	3	esférica
$V(z)$	p_x, p_y, L_z	3	plana
$V(\rho)$	p_z, L_z	2	cilíndrica
$V(x, y)$	p_z	1	traslacional
$V(\rho, z)$	L_z	1	axial
$V(x, y, z)$	ninguno	0	sin simetrías

Tabla C.1. Potenciales y sus simetrías en mecánica clásica.

Referencias C

- C.01. L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimave proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sunsu accepti* (1744).
- C.02. E. Zermelo, *Untersuchungen zur Variations Rechnung*, Doctoral Dissertation, Philosophischen Facultät, Universität zu Berlin (Schade, Berlin, 1894).
- C.03. M. Hadamard, *Sur un méthode de calcul des variations*, C. R. Acad. Sci. Paris **XX**, 1128 (1906).
- C.04. G. A. Bliss, *Calculus of Variations* (Open Court, La Salle, Illinois, 1925).
- C.05. J. H. Taylor, *Reduction of Euler's equations to a canonical form*, Bull. Am. Math. Soc. **31**, 257 (1925).
- C.06. E. T. Whittaker, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies* (Cambridge University Press, Cambridge, 1927).
- C.07. A. W. Tucker, *On tensor invariance in the calculus of variations*, Ann. Math. **35**, 341 (1934).
- C.08. Th. de Donder, *Théorie invariante du Calcul des Variations* (Gauthier-Villars, Paris, 1935).
- C.09. H. Busemann and W. Mayer, *On the foundations of calculus of variations*, Trans. Am. Math. Soc. **49**, 173 (1941).
- C.10. A. Sommerfeld, *Mechanics* (Academic Press, New York, 1952).
- C.11. O. Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations* (Dover, New York, 1961).
- C.12. L. E. Elsgoltz, *Calculus of Variations* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1962).
- C.13. H. Flanders, *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences* (Academic Press, New York, 1963).
- C.14. I. Gelfand and S. Fomin, *Calculus of Variations* (Prentice-Hall, Englewood Cliff, New Jersey, 1963).
- C.15. D. Ter Haar, *Elements of Hamiltonian Mechanics* (North-Holland, Amsterdam, 1964).
- C.16. J. Leech, *Classical Mechanics* (Math., London, 1965).
- C.17. L. A. Pars, *A Treatise on Analytical Dynamics* (Heinemann, London, 1965).
- C.18. B. L. Moiseiwitsch, *Variational Principles* (Interscience, New York, 1966).
- C.19. C. Lanczos, *Variational principles*, in *Mathematical Methods on Solid State and Superfluid Theory*, Scottish Summer School, ed. R. C. Clarke and G. H. Derrock (Oliver and Boyd, 1967).
- C.20. W. Yourgrau and S. Mandelstam, *Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory* (Saunders, Philadelphia, 1968).
- C.21. A. M. Arthurs, *A generalized Euler-Lagrange equation*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **66**, 399 (1969).
- C.22. E. J. Konopinski, *Classical Descriptions of Motion* (Freeman, San Francisco, 1969).
- C.23. G. Rosen, *Formulations of Classical and Quantum Dynamical Theory* (Academic Press, New York, 1969).
- C.24. C. Lanczos, *The Variational Principles of Mechanics* (University of Toronto Press, Toronto, 1970).
- C.25. D. G. B. Edelen, *Reflections on Variational Principles and Invariance Theory*, in *Problems in the Foundations of Physics*, ed. M. Bunge (Springer, Berlin, 1971).
- C.26. E. J. Saletan and A. H. Cromer, *Theoretical Mechanics* (Wiley, New York, 1971).
- C.27. G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems* (Am. Math. Soc., New York, 1972).
- C.28. G. W. Horndeski, *Differential operators associated with the Euler-Lagrange operator*, Tensor **28**, 303 (1974).
- C.29. D. Krupka, *On the structure of the Euler mapping*, Arch. Math. **10**, 55 (1974).
- C.30. L. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics* (Pergamon Press, Oxford, 1976).
- C.31. W. M. Tulczyjew, *The Lagrange differential*, Bull. Acad. Polon. Sci. **24**, 1089 (1976).
- C.32. R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (Benjamin/Cummings, Reading, Massachusetts, 1978).
- C.33. V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Berlin, 1978).
- C.34. R. M. Santilli, *Foundations of Classical Mechanics. I* (Springer, New York, 1978).
- C.35. J. Stickforth, *On the complementary Lagrange formalism of classical mechanics*, Am. J. Phys. **46**, 71 (1978).
- C.36. F. González-Gascón, *Note on the invariance in form of Lagrange's equations*, Rev. Mex. Fis. **26**, 33 (1979).
- C.37. H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980).
- C.38. J. Chrastina, *Another approach to the classical calculus of variations*, Arch. Math. **18**, 205 (1982).

- C.39. C. Fraser, *J. L. Lagrange's early contributions to the principles and methods of dynamics*, Arch. Hist. Exact. Sci. **28**, 197 (1983).
- C.40. H. A. Kastrup, *Canonical theories of Lagrangian dynamical systems in physics*, Phys. Rep. **101**, 1 (1983).
- C.41. C. Fraser, *J. L. Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations*, Arch. Hist. Exact Sci. **32**, 151 (1985).
- C.42. J. Lützen, *The geometrization of Analytical Mechanics. A Pioneering Contribution by Joseph Liouville (ca. 1850)*, Hist. Mod. Math. **1**, 77 (Academic Press, New York, 1989).
- C.43. C. G. Fraser, *Isoperimetric problems in the variational calculus of Euler and Lagrange*, Hist. Math. **19**, 4 (1992).
- C.44. C. G. Fraser, *The origins of Euler's variational calculus*, Arch. Hist. Exact Sci. **47**, 103 (1994).
- C.45. M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of Variations* (Springer, Berlin, 1996).
- C.46. C. G. Gray, G. Karl and V. A. Novikov, *The four variational principles of mechanics*, Ann. Phys. **251**, 1 (1996).
- C.47. H. Pulte, *Jacobi's criticism of Lagrange – the changing role of mathematics in the foundations of classical mechanics*, Hist. Math. **25**, 154 (1998).
- C.48. D. Hestenes, *New Foundations for Classical Mechanics* (Kluwer, Dordrecht, 1999).
- C.49. J.-L. Thiffeault, *Covariant time derivatives for dynamical systems*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 5875 (2001).
- C.50. I. A. Kogan and P. J. Olver, *Invariant Euler–Lagrange equations and the invariant variational bicomplex*, Acta Appl. Math. **76**, 137 (2003).
- C.51. R. K. Nesbet, *Variational Principles and Methods in Theoretical Physics and Chemistry* (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).
- C.52. C. G. Gray, C. Karl and V. A. Novikov, *Progress in classical and quantum variational principles*, Rep. Prog. Phys. **67**, 159 (2004).

Apéndice D. Formulación Variacional de la Teoría de Campos

El Formalismo Lagrangiano. La teoría de campos se preocupa de los sistemas dinámicos en los cuales la dimensión del espacio base es $d > 1$. En la mecánica clásica de sistemas discretos el tiempo juega un papel preferencial dado que es la única coordenada del espacio base. La primera dificultad que se debe resolver es este aumento de la dimensionalidad del espacio base. Este aumento de dimensionalidad se puede manejar considerando la teoría de campos como un sistema mecánico con un número infinito de grados de libertad.

La formulación canónica de la teoría de campos fue desarrollada por Heisenberg y Pauli en 1929.

El primer problema es identificar un parámetro de evolución que juegue el papel de tiempo. Para lograr este propósito se debe suponer que una de las direcciones del espacio base, que llamaremos T , juega un papel preferencial. Además, supondremos que Ω es simplemente conexo. Esto permite introducir una separación $1+p$ del espacio–tiempo (espacio base) por medio de un sistema de superficies espaciales simplemente conexas Σ y un intervalo de tipo temporal T . Entonces, localmente, se puede escribir $\Omega = \Sigma \otimes T$. Esto es equivalente a la separación $x^\mu = (x^0, \vec{x})$; $i = 1, \dots, p$, tiene el significado usual de un índice de tipo espacial; $t = x^0$ es la coordenada temporal. Además, se restringen las consideraciones a regiones Ω del espacio–tiempo de la forma $\Sigma \otimes [t_1, t_2]$, $[t_1, t_2] \in T$. Entonces, Ω está limitado en la dirección temporal por la superficies de tipo espacial Σ_1 y Σ_2 en los tiempos t_1 y t_2 , respectivamente. En la direcciones espaciales Ω está limitada por $\partial\Sigma$.

A continuación debemos considerar las siguientes situaciones:

1. Para un Σ cerrado, sin contorno, no es necesario introducir otras suposiciones.
2. Si Σ es cerrado, con un contorno $\partial\Sigma$, supondremos que $\Sigma = I \times S$, donde $I = [a, b]$, y S tiene la topología de $\partial\Sigma$.
3. Para un espacio abierto supondremos que S tiene la topología de una esfera de dimensión $p - 1$: S^{p-1} . Entonces Σ se puede escribir como $\Sigma = I \otimes \partial\Sigma$, con $I = [0, \infty)$ un intervalo de tipo radial. En este caso el contorno se coloca formalmente en el infinito, $a \rightarrow \infty$.

En los dos últimos casos denotaremos por r la coordenada sobre I y $r = a$ como el contorno. De este modo el tiempo adopta el papel de un parámetro de evolución.

Los infinitos grados de libertad son los valores de los campos sobre todos los puntos de un espacio Σ para un tiempo t . Dado que Σ es un continuo el número de puntos es infinito y por lo tanto el número de grados de libertad también lo es. Entonces, el índice discreto i en q^i de la mecánica clásica se transforma en un índice continuo $\vec{x} = x^i$ más algunos índices discretos A ; de este modo q^i es reemplazado por los campos $\phi^A(\vec{x})$. La suma sobre el índice discreto i se transforma en una integración sobre el índice continuo \vec{x} más una suma sobre el índice discreto A . Las derivadas de los campos con respecto al tiempo, a saber, $\dot{\phi}^A(\vec{x})$, se pueden considerar ahora como velocidades.

Las ecuaciones de movimiento son las de la mecánica clásica pero con un número infinito de grados de libertad.

El Lagrangiano es

$$L = \int_{\Sigma} \mathcal{L}(\phi(\vec{x}), \dot{\phi}(\vec{x}), \partial\phi(\vec{x})) d\Sigma, \quad (D.01)$$

donde \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana y $\partial\phi$ denota las derivadas espaciales. En lo que sigue, y cuando no se preste a confusión, se omitirá el índice continuo \vec{x} . Ahora la acción se escribe como

$$S[\phi] = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \mathcal{L} d\Sigma dt. \quad (D.02)$$

Supongamos que $\phi_0^A(\vec{x}, t)$ es la solución que minimiza la acción. Consideremos entonces variaciones arbitrarias infinitesimales de los campos dadas por

$$\phi^A(\vec{x}, t) = \phi_0^A(\vec{x}, t) + \eta^A(\vec{x}, t). \quad (D.03)$$

De la misma manera, las derivadas de los campos están dadas por

$$\dot{\phi}^A(\vec{x}) = \dot{\phi}_0^A(\vec{x}) + \dot{\eta}^A(\vec{x}), \quad (D.04)$$

y una expresión similar para las derivadas de tipo espacial, a saber,

$$\partial_i \phi^A(\vec{x}) = \partial_i \phi_0^A(\vec{x}) + \eta^A_{,i}(\vec{x}). \quad (D.05)$$

La variación de la acción es

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \eta^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,i}} \eta^A_{,i} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A} \dot{\eta}^A \right) d\Sigma dt. \quad (D.06)$$

Integrando por partes se obtiene

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Sigma} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} \eta^A d\Sigma dt + \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial \Sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,i}} \eta^A dS_i dt + \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A} \eta^A d\Sigma \Big|_{t_1}^{t_2}, \quad (D.07)$$

donde

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} = \frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta \phi^A} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A} \right), \quad (D.08)$$

con

$$\frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta \phi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \frac{d}{dx^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,i}} \right). \quad (D.09)$$

En la expresión (D.07) $d\Sigma$ y dS_i son los elementos de volumen y de superficie de Σ y de $\partial \Sigma$, respectivamente; $d\Sigma = dr dS$.

Tal como en la mecánica clásica de sistemas discretos, las ecuaciones de movimiento se obtienen exigiendo que $\delta S = 0$. Las dos primeras integrales en (D.07) dependen de los valores de $\eta^A(\vec{x})$ en el interior del intervalo $[t_1, t_2]$, mientras que la tercera depende de los valores de $\eta^A(\vec{x})$ en t_1 y t_2 . Por lo tanto, ambos términos deben ser cero en forma independiente.

Para la tercera integral se debe tener

$$\begin{aligned} \eta^A(\vec{x}, t_1) &= 0, \\ \eta^A(\vec{x}, t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (D.10)$$

Para la segunda integral existen diferencias importantes dependiendo de si el espacio Σ es cerrado, con o sin contorno, o abierto. Para un espacio cerrado sin contorno no aparecen complicaciones dado que entonces $\partial \Sigma \equiv 0$ y la segunda integral en (D.07) no aparece. Para un espacio cerrado con contorno o abierto la presencia de la segunda integral es inevitable. Por el momento supondremos que se cumplen condiciones de contorno tales que esta segunda integral se anula también en estos dos casos. Más adelante volveremos sobre este problema.

Dado que las variaciones $\eta^A(\vec{x})$ en la primera integral son arbitrarias lo que debe ser cero son los factores que multiplican a $\eta^A(\vec{x})$. La condición para ésto es

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} = 0. \quad (D.11)$$

más, en los dos últimos casos, una condición sobre el comportamiento asintótico de los campos dada por

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{\perp}(\vec{x})} \right|_{\partial \Sigma} = 0, \quad (D.12)$$

donde \perp indica la derivada en la dirección normal al contorno. Entonces, la ecuación (D.12) implica que para integrar las ecuaciones de campo (D.11) un conjunto completo de datos de Cauchy son las funciones $\phi^A(\vec{x}, t_1)$ y $\phi^A(\vec{x}, t_2)$ restringidas sólo a satisfacer (D.12).

El Formalismo Hamiltoniano. Ahora se puede desarrollar un formalismo Hamiltoniano en forma análoga al de la mecánica clásica. El momento canónico está definido como

$$\Pi_A(\vec{x}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A(\vec{x})}. \quad (D.13)$$

El Hamiltoniano se define extendiendo en forma adecuada la definición del Hamiltoniano de la mecánica discreta para incorporar el índice continuo \vec{x} , es decir, considerando la correspondiente integración. El resultado es

$$H = \int_{\Sigma} \left(\dot{\phi}^A(\vec{x}) \Pi_A(\vec{x}) - \mathcal{L}(\vec{x}) \right) d\Sigma. \quad (D.14)$$

Esta relación se puede reescribir como

$$H = \int_{\Sigma} \mathcal{H}(\vec{x}) d\Sigma, \quad (D.15)$$

donde

$$\mathcal{H}(\vec{x}) = \dot{\phi}^A(\vec{x}) \Pi_A(\vec{x}) - \mathcal{L}(\vec{x}) = \mathcal{H}^0_0(\vec{x}), \quad (D.16)$$

es la densidad Hamiltoniana. La variación de $\mathcal{H}(\vec{x})$ está dada por

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}(\vec{x}) = & -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A(\vec{x})} \delta \phi^A(\vec{x}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_i(\vec{x})} \delta \phi^A_i(\vec{x}) \\ & + \dot{\phi}^A(\vec{x}) \delta \Pi_A(\vec{x}), \end{aligned} \quad (D.17)$$

lo cual muestra que $\mathcal{H}(\vec{x})$ tiene la dependencia

$$\mathcal{H}(\vec{x}) = \mathcal{H}(\phi^A(\vec{x}), \phi^A_i(\vec{x}), \Pi_A(\vec{x})). \quad (D.18)$$

Por lo tanto, $(\phi^A(\vec{x}), \phi^A_i(\vec{x}), \Pi_A(\vec{x}))$ generan el correspondiente espacio de fase.

La variación de $\mathcal{H}(\vec{x})$ se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{H}(\vec{x}) = & -\frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \delta \phi^A(\vec{x}) + \dot{\phi}^A(\vec{x}) \delta \Pi_A(\vec{x}) \\ & - \frac{d}{dx^i} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_i(\vec{x})} \delta \phi^A(\vec{x}) \right). \end{aligned} \quad (D.19)$$

La variación del Hamiltoniano está dada por

$$\delta H = \int_{\Sigma} \delta \mathcal{H}(\vec{x}) d\Sigma. \quad (D.20)$$

Reemplazando (D.19) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta H = & \int_{\Sigma} \left(-\frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \delta \phi^A(\vec{x}) + \dot{\phi}^A(\vec{x}) \delta \Pi_A(\vec{x}) \right) d\Sigma \\ & - \oint_{\partial \Sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_i(\vec{x})} \delta \phi^A(\vec{x}) dS_i. \end{aligned} \quad (D.21)$$

Si se cumple la condición de contorno (D.12), entonces el último término en esta expresión es cero. La ecuación (D.21) se reduce a

$$\delta H = \int_{\Sigma} \left(-\frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \delta \phi^A(\vec{x}) + \dot{\phi}^A(\vec{x}) \delta \Pi_A(\vec{x}) \right) d\Sigma. \quad (D.22)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} = \dot{\phi}^A(\vec{x}), \quad (D.23a)$$

$$\frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} = -\frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta \phi^A(\vec{x})}. \quad (D.23b')$$

Cuando se cumplen las ecuaciones de campo (D.11) la segunda de las ecuaciones (D.23) se reduce a

$$\frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} = -\dot{\Pi}_A(\vec{x}). \quad (D.23b)$$

Por lo tanto, la dinámica Lagrangiana ahora queda descrita a través de las ecuaciones de Hamilton (D.23).

Consideremos ahora funciones ordinarias $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\phi, \partial\phi, \dot{\phi})$ en el espacio de fase. Entonces es posible definir los funcionales

$$F[\phi, \Pi] = \int_{\Sigma} \mathcal{F}(\phi, \partial\phi, \dot{\phi}) d\Sigma. \quad (D.24)$$

La derivada temporal de este tipo de funcional está dada por

$$\dot{F} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^A(\vec{x})} \dot{\phi}^A(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^A_i(\vec{x})} \frac{d}{dt} \phi^A_i(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} \dot{\Pi}_A(\vec{x}) \right) d\Sigma. \quad (D.25)$$

Suponemos que los campos son funciones suficientemente suaves como para poder realizar el intercambio $(d/dt)\phi^A_i = \partial_i \dot{\phi}^A$. En ese caso podemos reescribir (D.25) como

$$\dot{F} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^A(\vec{x})} \dot{\phi}^A(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^A_i(\vec{x})} \partial_i \dot{\phi}^A(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} \dot{\Pi}_A(\vec{x}) \right) d\Sigma. \quad (D.26)$$

Integrando por partes se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \dot{\phi}^A(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} \dot{\Pi}_A(\vec{x}) \right) d\Sigma \\ &\quad + \oint_{\partial \Sigma} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^A_i(\vec{x})} \dot{\phi}^A(\vec{x}) dS_i. \end{aligned} \quad (D.27)$$

En este punto una simplificación adicional es necesaria. Para obtener una analogía completa con la mecánica debemos restringir nuestras consideraciones a funcionales asintóticamente nulos, es decir, que satisfacen la condición

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^A_{\perp}(\vec{x})} \right|_{\partial \Sigma} = 0. \quad (D.28)$$

De esta manera (D.27) se reduce a

$$\dot{F} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \dot{\phi}^A(\vec{x}) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} \dot{\Pi}_A(\vec{x}) \right) d\Sigma. \quad (D.29)$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton (D.23) esto se reescribe como

$$\dot{F} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} \frac{\Delta \mathcal{H}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \right) d\Sigma. \quad (D.30)$$

Si definimos el paréntesis de Poisson como

$$\{F, G\} = \int_{\Sigma} \left(\frac{\Delta \mathcal{F}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Pi_A(\vec{x})} \frac{\Delta \mathcal{G}}{\Delta \phi^A(\vec{x})} \right) d\Sigma, \quad (D.31)$$

entonces la ecuación (D.31) se puede escribir como

$$\dot{F} = \{F, H\}, \quad (D.32)$$

en completa analogía con la mecánica.

Las variables canónicas $\phi^A(\vec{x})$ y $\Pi_A(\vec{x})$ se pueden escribir como funcionales con una función delta de Dirac como kernel, es decir

$$\begin{aligned} \phi^A(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} \phi^A(\vec{z}) \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) d\Sigma(\vec{z}), \\ \Pi_A(\vec{x}) &= \int_{\Sigma} \Pi_A(\vec{z}) \delta^3(\vec{x} - \vec{z}) d\Sigma(\vec{z}). \end{aligned} \quad (D.33)$$

Esto permite definir las densidades

$$\begin{aligned}\varphi^A(\vec{x}, \vec{z}) &= \phi^A(\vec{z}) \delta^3(\vec{x} - \vec{z}), \\ \mathcal{P}_A(\vec{x}, \vec{z}) &= \Pi_A(\vec{z}) \delta^3(\vec{x} - \vec{z}).\end{aligned}\quad (D.34)$$

Entonces se obtienen las siguientes derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\varphi^A(\vec{x}, \vec{z})}{\Delta\phi^B(\vec{z})} &= \delta_B^A \delta^3(\vec{x} - \vec{z}), \\ \frac{\partial\varphi^A(\vec{x}, \vec{z})}{\partial\phi^B(\vec{z})} &= \delta_B^A \frac{d\delta^3(\vec{x} - \vec{z})}{dx^i}, \\ \frac{\partial\mathcal{P}_A(\vec{x}, \vec{z})}{\partial\Pi_B(\vec{z})} &= \delta_A^B \delta^3(\vec{x} - \vec{z}).\end{aligned}\quad (D.35)$$

Por lo tanto, para las variables canónicas se obtiene

$$\begin{aligned}\{\phi^A(\vec{x}), \Pi_B(\vec{y})\} &= \delta_B^A \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\phi^A_i(\vec{x}), \Pi_B(\vec{y})\} &= \delta_B^A \frac{d\delta^3(\vec{x} - \vec{y})}{dx^i}.\end{aligned}\quad (D.36)$$

Las ecuaciones de Hamilton (D.23) se obtienen colocando F igual a las variables canónicas en (D.31).

Formulación Covariante de la Teoría de Campos. A continuación desarrollamos un formalismo covariante para la teoría de campos. Para obtener esta formulación es necesario que la variable temporal t y las variables espaciales \vec{x} sean consideradas todas de la misma manera. Por lo tanto, se introducen las coordenadas $x^\mu = (x^0, \vec{x})$, donde $x^0 = t$. Si $x^0 = t$ y las coordenadas \vec{x} se van a considerar de la misma manera, y dado que $x^0 = t$ es la coordenada del espacio base, entonces todas las coordenadas x^μ se deben considerar como coordenadas del espacio base. La integración sobre el espacio base se transforma ahora en una integración sobre $d^m x = dx^0 d^n \vec{x}$, donde $m = n + 1$. Entonces la acción debe ser de la forma

$$S[\phi] = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) d^n x, \quad (D.37)$$

donde Ω es una región del espacio base y \mathcal{L} es la densidad Lagrangiana.

Para minimizar la acción supongamos que ϕ_0^A es la configuración que minimiza la acción. Consideremos, por lo tanto una configuración modificada dada por

$$\phi^A = \phi_0^A + \eta^A. \quad (D.38)$$

Las derivadas de los campos quedan modificadas como

$$\phi^A_{,\mu} = \phi_{0,\mu}^A + \eta^A_{,\mu}. \quad (D.39)$$

La variación de la acción es

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A} \eta^A + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}} \eta^A_{,\mu} \right) d^n x \\ &= \int_{\Omega} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^A} \eta^A d^n x + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}} \eta^A d\Sigma_{\mu},\end{aligned}\quad (D.40)$$

donde se ha integrado por partes y

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^A} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^A_{,\mu}} \right), \quad (D.41)$$

es la derivada de Euler–Lagrange. Tal como para la mecánica clásica de sistemas discretos las ecuaciones de movimiento, ahora ecuaciones de campo, se obtienen exigiendo que $\delta S = 0$. La primera integral en (D.40) depende de los valores de η^A al interior de Ω , mientras que la segunda integral depende de los valores de η^A sobre el contorno $\partial\Omega$. Por lo tanto, ambos términos se deben anular en forma separada. Por el momento supondremos que se cumplen condiciones de contorno que garantizan que se anula el segundo término en (D.40). Dado que las variaciones η^A son arbitrarias se debe tener

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^A} = 0. \quad (D.42)$$

Estas son las ecuaciones de campo que gobiernan la dinámica del sistema. Con respecto a los términos de superficie en (D.40) estos serán considerados en más detalle más adelante debido a algunas sutilezas técnicas.

En forma análoga con (D.40) se puede definir un momento covariante

$$\pi_A{}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A{}_\mu}. \quad (D.43)$$

Entonces, las ecuaciones de campo se reescriben como

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - d_\mu \pi_A{}^\mu = 0. \quad (D.44)$$

En forma extendida estas ecuaciones se reescriben como

$$\alpha_A(\phi, \partial\phi) - \mathcal{W}_{AB}^{\mu\nu}(\phi, \partial\phi) \phi^B{}_{\mu\nu} = 0, \quad (D.45)$$

donde

$$\alpha_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \phi^B{}_\nu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^B \partial \phi^A{}_\mu}, \quad (D.46)$$

y

$$\mathcal{W}_{AB}^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_\mu \partial \phi^B{}_\nu}, \quad (D.47)$$

es una matriz Hessiana generalizada.

Lamentablemente no existe una formulación Hamiltoniana covariante de la teoría de campos.

Leyes de Conservación. Contrayendo las ecuaciones de campo (D.07) con $\phi^A{}_\mu$ se obtiene

$$\frac{d\mathcal{H}^\mu{}_\nu}{dx^\mu} = 0, \quad (D.48)$$

donde

$$\mathcal{H}^\mu{}_\nu = \phi^A{}_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A{}_\mu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}, \quad (D.49)$$

es el tensor de momento-energía.

En teoría de campos las leyes de conservación se escriben como ecuaciones de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{dJ^i}{dx^i} = 0. \quad (D.50)$$

La cantidad conservada es ρ integrado sobre la sección espacial, es decir,

$$Q = \int_\Sigma \rho d\Sigma. \quad (D.51)$$

De hecho, es fácil verificar que esta cantidad se conserva. Se tiene

$$\frac{dQ}{dt} = \int_\Sigma \frac{\partial \rho}{dx^0} d\Sigma = - \int_S \frac{\partial J^i}{\partial x^i} d\Sigma = - \oint J^i dS_i = 0. \quad (D.52)$$

En la última igualdad hemos supuesto que los campos se anulan sobre el contorno.

Ejemplos de cantidades conservadas son la energía y el momento lineal. La densidad de energía y la corriente respectiva están dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon &= \dot{\phi}^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A} - \mathcal{L}, \\ \epsilon^i &= \dot{\phi}^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A{}_i}, \end{aligned} \quad (D.53)$$

mientras que la densidad de momento y su corriente respectiva están dadas por

$$\begin{aligned} \pi_{(j)} &= \phi^A{}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A}, \\ \pi_{(j)}^i &= \phi^A{}_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}^A{}_i} - \delta_j^i \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (D.54)$$

La energía está dada por

$$E = \int_\Sigma \epsilon d\Sigma. \quad (D.55)$$

En forma análoga se obtiene una ley de conservación para el momento lineal, a saber,

$$p_i = \int_\Sigma \pi_{(i)} d\Sigma. \quad (D.56)$$

Esta última cantidad mide el flujo de momento lineal a través del contorno.

Otra cantidad conservada es el momento angular.

Sin embargo, las anteriores leyes de conservación (en forma de ecuaciones de continuidad) son sólo casos particulares de leyes de conservación y se necesita un método más sistemático para obtenerlas.

El Teorema de Noether. Ahora se puede formular el teorema de Noether en el contexto de la teoría de campos canónica. En teoría de campos las leyes de conservación de tipo Noether se obtienen, al igual que en mecánica clásica, considerando variaciones infinitesimales de los campos

$$\phi^A \rightarrow \phi^A + \xi^A(\phi), \quad (D.57)$$

donde ξ es una función infinitesimal. Bajo esta transformación el cambio en el Lagrangiano es

$$\xi(\mathcal{L}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \xi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,\mu}} \xi^A_{,\mu}, \quad (D.58)$$

donde

$$\xi^A_{,\mu} = \frac{d\xi^A}{dx^\mu} = \frac{\partial \xi^A}{\partial \phi^B} \phi^B_{,u}, u. \quad (D.59)$$

Para que las ecuaciones de campo sean las mismas es necesario que el cambio en el Lagrangiano se anule, es decir

$$\Delta_\xi \mathcal{L} = 0. \quad (D.60)$$

En este caso ξ es una simetría del Lagrangiano.

Introduzcamos la cantidad

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,\mu}} \xi^A. \quad (D.61)$$

Entonces, se obtiene

$$\frac{dJ^\mu}{dx^\mu} = \xi(\mathcal{L}) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi^A} \xi^A. \quad (D.62)$$

Por lo tanto, si se anula la variación de Noether del Lagrangiano y si se satisfacen las ecuaciones de campo, se tiene una ecuación de continuidad y por lo tanto se puede establecer un teorema de Noether para la teoría de campos en completa analogía con la mecánica clásica.

Términos de Superficie. Los términos de superficie juegan un rol importante en la teoría de campos. Esta es una de las características novedosas de la teoría de campos con respecto a la mecánica clásica debido al hecho de que el espacio base tiene más de una dimensión. Estos términos aparecen principalmente en las formulaciones variacionales de las teorías gravitacionales (Relatividad General), pero están presentes en todas las teorías de campo.

En la formulación canónica de la teoría de campos aparecen algunos problemas. De hecho, para espacios abiertos, o cerrados con contorno, los datos de Cauchy evolucionados con (D.11) deben satisfacer (D.12). Por lo tanto, estos datos no se pueden dar en forma arbitraria e independiente. Esto significa que el sistema tiene vínculos. Una manera de evitar esta dificultad es construir el formalismo Hamiltoniano tal como para un sistema con vínculos, donde (D.12) es el vínculo.

Para un espacio cerrado sin contorno la evolución temporal es generada por el Hamiltoniano canónico. Para un espacio abierto o cerrado con contorno se tiene un sistema con vínculos y el Hamiltoniano canónico no da la ecuación de movimiento correcta. En este caso la función que genera la evolución temporal es el Hamiltoniano canónico más una combinación lineal de los vínculos, es decir,

$$H_1 = H_c + \oint_{\partial \Sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A_{,\perp}} \lambda^A dS, \quad (D.52)$$

donde λ^A es un multiplicador de Lagrange. Por lo tanto, el Hamiltoniano primario es el Hamiltoniano canónico más un término de superficie.

El término de superficie correspondiente a la energía ha sido ampliamente estudiado en Relatividad General (Dirac, 1959; Arnowitt *et al.*, 1962; De Witt, 1967; Regge and Teitelboim, 1974).

Referencias D

- D.01.** H. Weyl, *Geodesic fields in the calculus of variation for multiple integrals*, Ann. Math. **36**, 607 (1935).
- D.02.** L. Rosenfeld, *Sur le tenseur d'impulsion-energie*, Mém. Acad. Roy. Belg. **18**, 6 (1940).
- D.03.** Th. H. J. Lepage, *Sur les champs geodesiques des integrales multiples*, Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. **27**, 27 (1941).
- D.04.** Th. H. J. Lepage, *Champs stationnaires, champs geodesiques et formes integrables. I*, Acad. Roy. Belgique Bull. Cl. Sci. **28**, 73,

247 (1941).

- D.05.** J. E. Wilkins, Jr., *Multiple integral problems in parametric form in the calculus of variations*, Ann. Math. **45**, 312 (1944).
- D.06.** J. Heller, *Covariant transformation law for the field equations*, Phys. Rev. **81**, 946 (1951).
- D.07.** E. L. Hill, *Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics*, Rev. Mod. Phys. **23**, 253 (1951).
- D.08.** W. Pauli, *On the Hamiltonian structure of non-local field theories*, Nuovo Cimento **10**, 648 (1953).
- D.09.** S. F. Edwards and R. E. Peierls, *Field equations in functional form*, Proc. Roy. Soc. London A **224**, 24 (1954).
- D.10.** P. A. M. Dirac, *The stress tensor in field dynamics*, Nuovo Cimento **1**, 16 (1955).
- D.11.** J. G. Fletcher, *Local conservation laws in generally covariant theories*, Rev. Mod. Phys. **32**, 65 (1960).
- D.12.** D. B. Fairlie, *Conservation laws and invariance principles*, Nuovo Cimento **37**, 897 (1965).
- D.13.** T. H. Boyer, *Derivation of conserved quantities from symmetries of the Lagrangian in field theory*, Am. J. Phys. **34**, 475 (1966).
- D.14.** A. Trautman, *Noether equations and conservation laws*, Commun. Math. Phys. **6**, 248 (1967).
- D.15.** D. H. Martin, *Canonical variables and geodesic fields for the calculus of variations of multiple integrals in parametric form*, Math. Z. **104**, 16 (1968).
- D.16.** R. L. Seliger and G. B. Whitman, *Variational principles in continuum mechanics*, Proc. Roy. Soc. A **305**, 1 (1968).
- D.17.** E. Candotti, C. Palmieri and B. Vitale, *On the inversion of Noether's theorem in the Lagrangian formalism. II. Classical field theory*, Nuovo Cimento A **70**, 233 (1970).
- D.18.** E. Candotti, C. Palmieri and B. Vitale, *Universal Noether's nature of infinitesimal transformations in Lorentz covariant field theories*, Nuovo Cimento A **71**, 271 (1972).
- D.20.** C. R. Hagen, *Does the energy-momentum tensor really need to be improved?*, Phys. Rev. D **5**, 389 (1972).
- D.21.** H. Rund, *Integral formulae associated with the Euler-Lagrange operators of multiple integral problems in the calculus of variations*, Aeq. Math. **11**, 212 (1974).
- D.22.** G. W. Horndeski, *Sufficiency condition under which a Lagrangian is an ordinary divergence*, Aeq. Math. **12**, 232 (1975).

- D.23.** J. Kijowski and W. Szczyrba, *A canonical structure for classical field theories*, Commun. Math. Phys. **46**, 183 (1976).
- D.24.** P. Dedecker, *Généralisation d'une formule de H. A. Schwarz aux intégrales multiple des calcul des variations*, C. R. Acad. Sci. Paris A **285**, 59 (1977).
- D.25.** P. Dedecker, *Intégrales complètes de l'équation aux dérivées partielles de Hamilton-Jacobi d'une intégral multiple*, C. R. Acad. Sci. Paris A **285**, 123 (1977).
- D.26.** I. M. Anderson, *On the characterization of energy-momentum tensors*, Gen. Rel. Grav. **10**, 461 (1979).
- D.27.** F. Guil Guerrero and L. Martínez Alonso, *Generalised variational derivatives in field theory*, J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 689 (1980).
- D.28.** S. Hojman, *Problem of the identical vanishing of Euler-Lagrange derivatives in field theory*, Phys. Rev. D **27**, 451 (1983).
- D.29.** P. J. Olver, *Hyperjacobians, determinant ideals and weak solutions to variational problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A **95**, 317 (1983).
- D.30.** M. Ferraris and M. Francaviglia, *Energy-momentum tensors and stress tensors in geometric field theories*, J. Math. Phys. **26**, 1243 (1985).
- D.31.** J. D. Brown and M. Henneaux, *On the Poisson brackets of differentiable generators in classical field theory*, J. Math. Phys. **27**, 489 (1986).
- D.32.** D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery and T. Ratiu, *The Hamiltonian structure for dynamic free boundary problems*, Phys. Rev. D **18**, 391 (1986).
- D.33.** J. E. Marsden, R. Montgomery, P. J. Morrison and W. B. Thompson, *Covariant Poisson brackets for classical fields*, Ann. Phys. **169**, 29 (1986).
- D.34.** J. E. Marsden, *The Hamiltonian formulation of classical field theory*, Contemp. Math. **71**, 221 (1988).
- D.35.** G. Barnich, M. Henneaux and C. Schomblond, *Covariant description of the canonical formalism*, Phys. Rev. D **44**, R939 (1991).
- D.36.** D. B. Fairlie and J. Govaerts, *Euler hierarchies and universal equations*, J. Math. Phys. **33**, 3543 (1992).
- D.37.** M. J. Gotay and J. E. Marsden, *Stress-energy-momentum tensors and the Belinfante-Rosenfeld formula*, Contemp. Math. **132**, 367 (1992).
- D.38.** V. O. Soloviev, *Boundary values as Hamiltonian variables. I. New Poisson brackets*, J. Math. Phys. **34**, 5747 (1993).

- D.39.** I. M. Anderson and C. G. Torres, *Asymptotic conservation laws in classical field theories*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4109 (1996).
- D.40.** A. Echeverría-Enríquez, M. Muñoz-Lecanda and N. Román-Roy, *Geometry of Lagrangian first-order classical field theory*, Forts. Phys. **44**, 235 (1996).
- D.41.** A. Accioly, A. D. Azeredo, C. M. L. de Aragão and H. Mukai, *A simple prescription for computing the stress-energy tensor*, Class. Quantum Grav. **14**, 1163 (1997).
- D.42.** S. C. Anco and G. Bluman, *Direct construction of conservation laws from field equations*, Phys. Rev. Lett. **78**, 2869 (1997).
- D.43.** V. O. Soloviev, *Differences between admissible and “differentiable” Hamiltonians*, Phys. Rev. D **55**, 7973 (1997).
- D.44.** R. Thiele, *On some contributions to field theory in the calculus of variations from Beltrami to Carathéodory*, Hist. Math. **24**, 281 (1997).
- D.45.** G. Magnano and L. M. Sokolowski, *Can the local energy-momentum conservation laws be derived solely from field equations?*, Gen. Rel. Grav. **30**, 1281 (1998).
- D.46.** A. A. Chernitskii, *A direct method for obtaining the differential conservation laws*, in *Marcel Grossmann 8* (1999), p. 280.
- D.47.** B. L. Voronov, I. V. Tyutin and Sh. S. Shakhverdiev, *Local variational differential operators in field theory*, Theor. Math. Phys. **120**, 1026 (1999).
- D.48.** O. Krupkova and D. Smetanova, *On regularization of variational problems in first-order field theory*, in *Proc. of 20th Winter School on Geom. and Phys.*, Rend. Circ. Mat. Palermo Suppl. **66**, 133 (2001).
- D.49.** P. Teyssandier, *Can one generalize the concept of energy-momentum tensor?*, Ann. Fond. L. de Broglie **26**, 459 (2001).
- D.50.** M. de León, J. C. Marrero and D. Martín de Diego, *A new geometrical setting for classical field theories*, in *Classical and Quantum Integrability*, Banach Center Pub. **59** (Institute of Mathematics, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2002).
- D.51.** A. Echeverría-Enríquez, M. Muñoz-Lecanda and N. Román-Roy, *A Geometrical analysis of the field equations in field theories*, Int. J. Math. Sci. **29**, 687 (2002).
- D.52.** O. Krupkova, *Hamiltonian field theory*, J. Geom. Phys. **43**, 93 (2002).
- D.53.** O. Krupkova and D. Smetanova, *Legendre transformation for regularizable Lagrangians in field theory*, Lett. Math. Phys. **58**, 189 (2002).
- D.54.** V. O. Soloviev, *Boundary values as Hamiltonian variables. II. Graded structure*, J. Math. Phys. **43**, 3636 (2002).
- D.55.** V. O. Soloviev, *Boundary values as Hamiltonian variables. III. Ideal fluid with a free surface*, J. Math. Phys. **43**, 3655 (2002).
- D.56.** C. M. Arizmendi, J. Delgado, H. N. Núñez-Yépez and A. L. Salas-Brito, *Conserved quantities in the variational equations*, Rev. Mex. Fis. **49**, 298 (2003).
- D.57.** H. R. Brown and P. Holland, *Dynamical versus variational symmetries: understanding Noether’s first theorem*, Molec. Phys. **102**, 133 (2004).
- D.58.** M. de León, D. Martín de Diego and A. Santamaría-Merino, *Symmetries in classical field theories*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **1**, 651 (2004).
- D.59.** R. E. Gamboa S., *On the energy-momentum tensor*, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 9573 (2004).
- D.60.** M. Crampin and D. J. Saunders, *On null Lagrangians*, Diff. Geom. Appl. **22**, 131 (2005).

Apéndice E. Geometría Riemanniana Extrínseca

La elaboración, por parte de Riemann, del concepto de variedad fue revolucionaria en el sentido que se dejó de hacer referencia al espacio en el cual una superficie estaba inmersa. Sólo las cantidades intrínsecamente relacionadas con la estructura de la superficie eran necesarias para describir sus propiedades geométricas. Sin embargo, aun cuando este enfoque abstracto es matemáticamente correcto, muchas veces es útil poder visualizar un espacio de Riemann, definido en forma intrínseca, como una superficie inmersa en algún espacio de dimensión superior. Existe una serie de resultados matemáticos que garantizan que siempre es posible considerar un espacio de Riemann, definido de manera intrínseca, como una superficie inmersa en algún espacio plano adecuado. A pesar de esta equivalencia, el enfoque extrínseco a la geometría ha recibido menos atención en comparación con el enfoque intrínseco habitual.

A continuación consideraremos algunos aspectos matemáticos fundamentales con respecto a la geometría de Riemann extrínseca. Comenzaremos con la definición de una inmersión isométrica y a continuación consideraremos los principales teoremas sobre inmersiones isométricas, locales y globales, de variedades Riemannianas en espacios planos de dimensión superior. El resultado más importante es que cualquier variedad Riemanniana V_n se puede considerar como una subvariedad local de E_N con $N = n(n+1)/2$. Posteriormente, consideraremos las ecuaciones de Gauss–Codazzi–Ricci, las cuales son las condiciones de integrabilidad, y por lo tanto condiciones necesarias, para la inmersión. Se introduce el concepto de clase de la inmersión, que es el número mínimo de dimensiones adicionales necesarias para satisfacer las ecuaciones de Gauss–Codazzi–Ricci

Teoremas de Inmersión. Sea E_N un espacio Riemanniano plano con tensor métrico $G_{AB}(\mathbf{X})$, donde X^A , $A = 1, \dots, N$ son coordenadas locales. El correspondiente elemento de línea está dado por

$$dS^2 = G_{AB}(\mathbf{X}) dX^A dX^B. \quad (E.01)$$

Supongamos ahora que las coordenadas X^A están dadas por las expresiones

$$X^A = X^A(\mathbf{x}), \quad (E.02)$$

donde x^i , $i = 1, \dots, n$, es un conjunto de n parámetros. En este caso el elemento de línea (E.01) se reduce a

$$dS^2|_{X=x} = G_{AB}(\mathbf{X}) X^A_i X^B_j dx^i dx^j, \quad (E.03)$$

donde

$$X^A_i = \frac{\partial X^A}{\partial x^i}. \quad (E.04)$$

Comparando con (B.xx) se ve que la forma cuadrática (E.03) corresponde a un elemento de línea con un tensor métrico dado por

$$g_{ij} = G_{AB} X^A_i X^B_j. \quad (E.05)$$

Esta es la métrica inducida.

Existen varios requisitos simples para poder considerar a g_{ij} como el tensor métrico de algún espacio V_n . En primer lugar se debe tener que

$$\det(g_{ij}) = \det(G_{AB} X^A_i X^B_j) \neq 0. \quad (E.06)$$

Un par de situaciones extremas en las cuales la condición anterior no se cumple son las siguientes. En primer lugar,

$$G_{AB} X^A_i X^B_j \equiv 0. \quad (E.07)$$

Por lo tanto X^A_i no puede ser un vector nulo de la métrica G_{AB} . Una condición más débil es que X^A_i sea un autovector nulo de G_{AB} , es decir,

$$G_{AB} X^B_j \equiv 0. \quad (E.08)$$

La condición necesaria para evitar la singularidad es que

$$\text{rango}(X^A_i) = n. \quad (E.09)$$

Si esta condición se cumple, entonces V_n se puede considerar como una variedad Riemanniana.

Lo anterior es una *inmersión explícita*: las funciones $G_{AB}(\mathbf{X})$ y $X^A(\mathbf{x})$ están dadas y la métrica g_{ij} , se obtiene a partir de (E.05). En una *inmersión implícita*, por el contrario, lo que se da es la métrica g_{ij} , y se deben encontrar las funciones $G_{AB}(\mathbf{X})$ y $X^A(\mathbf{x})$ tal que se satisfaga (E.05). Este es el problema de la inmersión y la existencia de una solución está garantizada por los teoremas de inmersión, locales y globales, que revisaremos a continuación.

El problema de la inmersión consiste en encontrar funciones $X^A(\mathbf{x})$ y G_{AB} para un g_{ij} dado, que satisfagan la ecuación (E.05). Este problema se puede abordar en forma local o global.

Por supuesto, se podría considerar un número excesivamente grande de dimensiones adicionales. En el caso local, para signatura definida, el teorema fue establecido por Janet (1926), Cartan (1927) y Burstin (1931).

Teorema E.1. *Toda variedad Riemanniana V_n se puede sumergir en forma analítica e isométrica en E_N , con $N = n(n+1)/2$.*

La demostración consiste en una expansión en serie de potencias en torno a un punto arbitrario.

Para lo que sigue la signatura también es importante, por lo tanto, la notación anterior se debe refinar como sigue. $V_n(t, s)$ denota una variedad Riemanniana de dimensión n con métrica analítica y no-degenerada $g_{ij}(\mathbf{x})$ con t autovalores positivos y s autovalores negativos, tal que $t+s = n$; $E_N(T, S)$ denota un espacio plano con topología global euclídea con métrica analítica y no-degenerada $G_{AB}(\mathbf{X})$ con T auto-valores positivos y S auto-valores negativos, tal que $T + S = N$.

La generalización del teorema anterior al caso de métricas indefinidas fue desarrollado por Friedman (1961).

Teorema E.2. *Sea $g_{ij}(\mathbf{x})$ funciones analíticas en una vecindad de $x^k = 0$, con signatura (t, s) , y sea $G_{AB}(\mathbf{X})$ funciones analíticas en una vecindad de $X^A = 0$, con signatura (T, S) . Si $N = n(n+1)/2$, $T > t$ y $S > s$, entonces existen funciones analíticas $X^A = X^A(\mathbf{x})$ en una vecindad de $x^i = 0$ que satisfacen las condiciones*

$$\begin{aligned} X^A(0) &= 0, \\ \text{rango}(X^A_i(0)) &= n, \\ g_{ij}(\mathbf{x}) &= G_{AB}(\mathbf{X}(\mathbf{x})) X^A_i(\mathbf{x}) X^B_j(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (E.10)$$

La demostración de este teorema se puede encontrar en el trabajo original de Friedman.

Por supuesto, el teorema establece sólo la existencia de funciones G_{AB} y X^A que satisfacen (E.10) pero, debido a la definición de inmersión

isométrica este resultado se traduce en un teorema de existencia para la inmersión el cual se establece como sigue.

Teorema E.3. (*Inmersión Isométrica Local.*) *Toda variedad de Riemann $V_n(t, s)$ se puede sumergir en forma analítica e isométrica en $E_N(T, S)$ con $N = n(n+1)/2$, $T \geq t$ y $S \geq s$.*

La demostración de Friedman muestra que la inmersión no está determinada en forma única y que el número de parámetros libres es independiente de la signatura de los tensores métricos involucrados. Para métricas con signatura definida este número de parámetros libres fue evaluado por Leichtweis (1956).

Ambas métricas, la de $V_n(t, s)$ a ser inmersa y la del espacio de inmersión $E_N(T, S)$ se pueden elegir en forma bastante arbitraria, excepto por algunas condiciones de dimensión y signatura. Por ejemplo, no se imponen restricciones adicionales sobre la signatura de los restantes $N - n$ dimensiones de $E_N(T, S)$.

El primer resultado concreto acerca de inmersiones globales es debido a Nash (1950).

Teorema E.4. *Toda variedad Riemanniana compacta (no-compacta) de clase de diferenciabilidad C^k , con $k \geq 3$, posee una inmersión isométrica global de clase de diferenciabilidad C^k , en E_N con*

$$\begin{aligned} N_c &= \frac{1}{2} n (3n + 11), \\ N_{nc} &= \frac{1}{2} n (n + 1) (3n + 11), \end{aligned} \quad (E.11)$$

para los casos compacto y no-compacto, respectivamente.

En la demostración de este teorema la positividad de la métrica juega un rol fundamental y, de hecho, la demostración falla si la métrica es indefinida. La extensión a métricas indefinidas es debida a Clarke (1970), que en el caso de variedades no compactas también es una mejora con respecto al resultado de Nash.

Teorema E.5. *Toda variedad Riemanniana $V_n(t, s)$ de clase de diferenciabilidad C^∞ , con métrica de clase de diferenciabilidad C^k , con $k \geq 3$, se puede sumergir global e isométricamente en un $E_N(T, S)$ con $N = T + S$, $S = s + 1$ y*

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{2} n (3n + 11), \\ T_{nc} &= \frac{1}{6} (2n^3 + 15n^2 + 37n + 6), \end{aligned} \quad (E.12)$$

para los casos compacto y no-compacto, respectivamente.

El siguiente resultado, debido a Greene (1970), usa una condición de diferenciabilidad más fuerte.

Teorema E.6. *Toda variedad Riemanniana $V_n(t, s)$ de clase de diferenciabilidad C^∞ , con métrica de clase de diferenciabilidad C^∞ , se puede sumergir global e isométricamente en un $E_N(T, S)$ con $N = T + S$, tal que*

$$\begin{aligned} T_c = S_c &= \frac{1}{2} n (n + 5), \\ T_{nc} = S_{nc} &= 2 (2n + 1) (n + 3), \end{aligned} \quad (E.13)$$

para los casos compacto y no-compacto, respectivamente.

En el caso compacto, la mejora con respecto al resultado de Clarke comienza sólo para $n \geq 20$.

Un aspecto poco agradable del resultado de Clarke es el hecho que N depende en forma explícita de la signatura de $V_n(t, s)$; los teoremas para inmersiones isométricas locales no poseen esta dependencia. Por otro lado, el teorema de Greene introduce un número de dimensiones, de tipo tiempo y de tipo espacio, forzosamente alto para garantizar la posibilidad de albergar las dimensiones tipo tiempo y tipo espacio de $V_n(t, s)$.

Todos los números anteriores son sólo cotas optimales y se puede considerar que el problema de inmersión global aún no ha sido resuelto en forma completa y satisfactoria.

Dado un tensor métrico \mathbf{g} con componentes g_{ij} siempre existen funciones $X^A = X^A(\mathbf{x})$ tales que se cumple (E.03). Por lo tanto, cualquier espacio Riemanniano se puede considerar como inmerso en un espacio plano de dimensión superior.

Las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. De acuerdo con los resultados de la sección anterior las descripciones intrínseca y extrínseca de una variedad de Riemann son completamente equivalentes. En el caso extrínseco se supone que la métrica de la variedad Riemanniana es de la forma (E.xx). Por lo tanto, todos los objetos geométricos asociados con esta métrica se pueden evaluar en forma directa en términos de la inmersión. Esto constituye una inmersión explícita. En el caso extrínseco lo que se da es la métrica g_{ij} . El problema es determinar las funciones X^A y $G_{AB}(\mathbf{X})$. Las condiciones de integrabilidad para este problema son las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. Este último caso se conoce como una inmersión implícita.

En una inmersión explícita se supone que la variedad V_n ya está inmersa en un espacio plano E_N de dimensión superior. Supondremos que el espacio de inmersión es un espacio plano, aunque también se pueden considerar inmersiones en espacios no-planos. Por otra parte, dado que supondremos un espacio de inmersión plano, no hay ninguna pérdida de generalidad si utilizamos coordenadas pseudo-Cartesianas; es decir $G_{AB} = \text{diag}(\pm, \dots, \pm)$. En este caso el espacio V_n inmerso está dado por las ecuaciones $X^A = X^A(\mathbf{x})$ y la métrica está dada por (E.05). Se supone que $g = \det(g_{ij}) \neq 0$ y que por lo tanto es posible introducir una métrica contravariante g^{ij} . Los símbolos de Christoffel están dados por

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}(\mathbf{g}) = g^{kl} \eta_{AB} X^A{}_{,l} X^B{}_{,ij}. \quad (E.14)$$

y

$$X^A{}_{,ij} = \frac{\partial^2 X^A}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (E.15)$$

Por otro lado, se tiene

$$\begin{aligned} \nabla_{ij} X^A &= \nabla_i X^A{}_{,j} = \nabla_j X^A{}_{,i} \\ &= X^A{}_{,ij} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}(\mathbf{g}) X^A{}_{,k} \\ &= X^A{}_{,ij} - g^{kl} X^C{}_{,l} \eta_{CB} X^B{}_{,ij} X^A{}_{,k}. \end{aligned} \quad (E.16)$$

Esta ecuación se puede reescribir como

$$\nabla_{ij} X^A = H^A{}_B X^B{}_{,ij}. \quad (E.17)$$

donde

$$H^{AB} = \eta^{AB} - X^A{}_{,i} g^{ij} X^B{}_{,j}. \quad (E.18)$$

Los índices se suben y bajan con g_{ij} y η_{AB} . Observemos que $H^A{}_B$ es una matriz singular y por lo tanto no invertible. De hecho, se tiene

$$H^A{}_B X^B{}_{,i} \equiv 0, \quad (E.19)$$

Esta matriz posee la propiedad adicional

$$H^A{}_B H^B{}_C = H^A{}_C. \quad (E.20)$$

Finalmente se llega a la identidad

$$\eta_{AB} X^A{}_{,k} \nabla_{ij} X^B \equiv 0. \quad (E.21)$$

Ahora se puede calcular el tensor de Riemann. El resultado es

$$R_{ijl}{}^k(\mathbf{g}) = \eta_{AB} (\nabla_{ik} X^A \nabla_{jl} X^B - \nabla_{il} X^A \nabla_{jk} X^B). \quad (E.22)$$

Estas son las ecuaciones de Gauss.

El tensor de Ricci está dado por

$$R^i{}_j = \eta_{AB} (\nabla^2 X^A \nabla^i_j X^B - \nabla^i_k X^A \nabla^k_j X^B), \quad (E.23)$$

y los índices latinos minúsculos se suben y se bajan con \mathbf{g} . La curvatura escalar está dada por

$$R = \eta_{AB} (\nabla^2 X^A \nabla^2 X^B - \nabla^i_j X^A \nabla^j_i X^B). \quad (E.24)$$

La clase de la inmersión.

Las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. Los $X^A{}_i$ se pueden considerar como n vectores en E_N tangentes a V_n . Sean $N^A{}_a$, $a = 1, \dots, N - n$, $N - n$ vectores en E_N ortogonales a V_n , es decir

$$\eta_{AB} X^A{}_i N^B{}_a = 0. \quad (E.25)$$

Por lo tanto, $\nabla_i X^A{}_j$ es un vector normal a V_n , es decir, es una combinación lineal de $N^A{}_a$'s, es decir

$$Y^A{}_{ij} = \Omega^a{}_{ij} N^A{}_a. \quad (E.26)$$

Superficies minimales. Una superficie minimal está descrita por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = g^{1/2}. \quad (E.27)$$

Un ejemplo interesante de superficie minimal aparece en el caso de topología esférica. Consideremos el elemento de línea en coordenadas esféricas

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (E.28)$$

Supongamos que $r = r(\theta, \varphi)$. Entonces

$$ds^2 = (r^2 + r_\theta^2) d\theta^2 + 2r_\theta r_\varphi d\theta d\varphi + (r^2 \sin^2 \theta + r_\varphi^2) d\varphi^2. \quad (E.29)$$

Es decir

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 + r_\theta^2 & r_\theta r_\varphi \\ r_\theta r_\varphi & r^2 \sin^2 \theta + r_\varphi^2 \end{pmatrix}. \quad (E.30)$$

El determinante está dado por

$$g = r^4 \sin^2 \theta + r^2 r_\theta^2 \sin^2 \theta + r^2 r_\varphi^2. \quad (E.31)$$

El tensor métrico inverso está dado por

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta + r_\varphi^2 & -r_\theta r_\varphi \\ -r_\theta r_\varphi & r^2 + r_\theta^2 \end{pmatrix}. \quad (E.32)$$

El Lagrangiano correspondiente está dada por

$$\mathcal{L} = [r^4 \sin^2 \theta + r^2 r_\theta^2 \sin^2 \theta + r^2 r_\varphi^2]^{1/2}. \quad (E.33)$$

Referencias E

E.01. L. Schläfli, *Nota alla Memoria del Signor Beltrami*, “Sugli spazii di curvatura costante”, Ann. di Mat. 2^e série, **5**, 170 (1871).

- E.02.** J. Campbell, *A Course on Differential Geometry* (Clarendon, Oxford, 1926).
- E.03.** M. Janet, *Sur la possibilité du plonger un espace riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Polon. Math. **5**, 38 (1926).
- E.04.** J. Lense, *Über ametrische Mannifaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verwindender Diskriminante*, Jber. Deutsche Math. **35**, 280 (1926).
- E.05.** E. Cartan, *Sur la possibilité de plonger un espace Riemannien donné dans un espace euclidien*, Ann. Soc. Polon. Math. **6**, 1 (1927).
- E.06.** C. Burstin, *Ein Beitrag zum Problem der Einbettung der riemannschen Raume in Euklidischen Raumen*, Recuación Math. Moscou (Math. Sbornik) **38**, 74 (1931).
- E.07.** T. Y. Thomas, *Imbedding theorems in differential geometry*, Bull. Am. Math. Soc. **45**, 841 (1939).
- E.08.** M. Matsumoto, *Local imbedding of Riemann spaces*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A Math. **28**, 179 (1953).
- E.09.** K. Leichtweiss, *Das problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie I*, Math. Ann. **130**, 442 (1956).
- E.10.** J. Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. Math. **63**, 20 (1956).
- E.11.** B. O’Neill, *An algebraic criterion for immersion*, Pacific J. Math. **9**, 1239 (1959).
- E.12.** A. Friedman, *Local isometric embedding of Riemannian manifolds with indefinite metric*, J. Math. Mech. **10**, 625 (1961).
- E.13.** L. Magaard, *Zur einbettung riemannscher Raume in Einstein-Raume und konformeulidische Raume* (Ph.E. Thesis, Kiel, 1963).
- E.14.** C. J. Clarke, *On the isometric global embedding of pseudo-riemannian manifolds*, Proc. Roy. Soc. London A **314**, 417 (1970).
- E.15.** R. E. Greene, *Isometric embedding of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds*, Memoirs Am. Math. Soc. n. 97 (1970).
- E.16.** M. Gunther, *Zum Einbettungssatz von J. Nash*, Math. Nachr. **144**, 165 (1989).
- E.17.** D. Yang, *Gunther’s proof of Nash’s isometric embedding theorem*, math.DG/9807169 (1998).