Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Calcule la integral
$$\int_C (1 - ye^{-x})dx + e^{-x}dy$$
donde C es el camino parametrizado por $r(t) = (t^2, 1 + t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

2. Un alambre tiene la forma del cuarto de círculo de radio a en el primer cuadrante. Calcule la masa total y el centro de masa del alambre si su densidad está dada por $\rho(x, y) = xy$.

3. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada por
$$x = uv, \quad y = u \sin v, \quad z = v \cos u$$
en el punto $(0, 0, \pi)$.

4. Encuentre el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ encerrada por el cilindro $x^2 + y^2 = Rx$.

5. Evalúe
$$\int_S x^2 + y^2 + z^2 dS$$
donde S es la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre los planos $z = 0$ y $z = 2$ junto con los discos que forman la tapa y la base.

6. Evalúe
$$\int_S \left[xy, 4x^2, yz\right] \cdot d\overline{S}$$
donde S es la superficie $z = xe^y$, con $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, orientada hacia arriba.

7. Sea
$$\vec{F}(x, y) = [\cos(x - 2y), -2\cos(x - 2y)].$$
   (a) Sea $f(x, y) = \sin(x - 2y)$. Calcule $\nabla f(x, y)$.
   (b) Evalúe $\int_\sigma \vec{F} \cdot d\vec{s}$ para $\sigma(t) = (\frac{\pi}{2}t, \frac{\pi}{2}t)$, $0 \leq t \leq 1$.
   (c) Encuentre trayectorias σ_1 y σ_2 tales que:
      i. $\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -1$; y,
      ii. $\int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1$.

8. Sea S es la parte del cono $z^2 = x^2 + y^2$ entre los planos $z = 1$ y $z = 3$.
   (a) Encuentre una parametrización de S.
   (b) Calcule
$$\iint_S f dS$$
   donde $f(x, y, z) = x^2 z^2$.

9. Considere la curva parametrizada por
$$r(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1 \ , \ \frac{2t}{t^2 + 1} \right).$$

a) Calcule la función $s(t)$ que mide la longitud de la curva desde el tiempo inicial 0 hasta el tiempo t.

b) Escriba t en terminos de s. Es decir despeje t en la ecuación

$$s = s(t).$$

c) Reparametrice la curva respecto a su longitud de arco, es decir en función de s, y verifique que la rapidez respecto a s es constante. Simplifique la parametrización en términos de s y caracterice el tipo de curva parametriza por r. Verifique que la parametrización original en términos de t satisface la ecuación en (x, y) de aquella curva.

10. Considere la esfera S parametrizada por

$$x = \sin\phi\cos\theta, \quad y = \sin\phi\sin\theta, \quad z = \cos\phi,$$

con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi \leq \pi$.

Sea P el plano de ecuación $ax + by + cz = 0$, con $c \neq 0$. Demuestre que la curva sobre el plano $\theta\phi$ cuya imagen mediante la parametrización es la intersección de S y P es la curva de ecuación:

$$\phi = \operatorname{arccot}\left(-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\sin(\alpha+\theta)\right),$$

donde α es el ángulo tal que $\cos\alpha = b/\sqrt{a^2+b^2}$ y $\sin\alpha = a/\sqrt{a^2+b^2}$, cuando $a \neq 0$ ó $b \neq 0$; ó

$$\phi = \pi/2$$

si $a = 0$ y $b = 0$.