

# Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere la curva parametrizada por

$$r(t) = \left( \frac{2}{t^2 + 1} - 1, \frac{2t}{t^2 + 1} \right).$$

- Calcule la función  $s(t)$  que mide la longitud de la curva desde el tiempo inicial 0 hasta el tiempo  $t$ .
- Escriba  $t$  en términos de  $s$ . Es decir despeje  $t$  en la ecuación

$$s = s(t).$$

- Reparametrice la curva respecto a su longitud de arco, es decir en función de  $s$ , y verifique que la rapidez respecto a  $s$  es constante. Simplifique la parametrización en términos de  $s$  y caracterice el tipo de curva parametrizada por  $r$ . Verifique que la parametrización original en términos de  $t$  satisface la ecuación en  $(x, y)$  de aquella curva.

2. Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx.$$

3. Encuentre el volumen del sólido encerrado por el paraboloides  $x = y^2 + z^2$  y el plano  $x = 16$ .

4. Considere el tetraedro acotado por los planos:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1,$$

con densidad  $\rho(x, y, z) = y$ .

- Calcule la masa total del tetraedro.
  - Encuentre su centro de masa.
5. a) Escriba la ecuación de la elipse  $x^2 - xy + y^2 = 2$  en términos de  $u$  y  $v$ , donde  $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$ ,  $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$ .
- b) Evalúe la integral  $\int_D f dA$  donde  $D$  es la región acotada por la elipse  $x^2 - xy + y^2 = 2$ , y  $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ , usando las coordenadas  $u$  y  $v$ .
6. Evalúe la integral  $\int_D f dA$  donde  $D$  es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse  $9x^2 + 4y^2 = 1$ , y  $f(x, y) = \sin(9x^2 + 4y^2)$ .

7. Calcule la integral

$$\int_C (1 - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy$$

donde  $C$  es el camino parametrizado por  $r(t) = (t^2, 1 + t^3)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

8. Un alambre tiene la forma del cuarto de círculo de radio  $a$  en el primer cuadrante. Calcule la masa total y el centro de masa del alambre si su densidad está dada por  $\rho(x, y) = xy$ .

9. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada por

$$x = uv, \quad y = u \sin v, \quad z = v \cos u$$

en el punto  $(0, 0, \pi)$ .

10. Encuentre el área de la parte de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  encerrada por el cilindro  $x^2 + y^2 = Rx$ .

11. Evalúe

$$\int_S x^2 + y^2 + z^2 dS$$

donde  $S$  es la parte del cilindro  $x^2 + y^2 = 9$  entre los planos  $z = 0$  y  $z = 2$  junto con los discos que forman la tapa y la base.

12. Evalúe

$$\int_S [xy, 4x^2, yz] \cdot d\vec{S}$$

donde  $S$  es la superficie  $z = xe^y$ , con  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ , orientada hacia arriba.

13. Considere la esfera  $S$  parametrizada por

$$x = \sin \phi \cos \theta, \quad y = \sin \phi \sin \theta, \quad z = \cos \phi,$$

con  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  y  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

Sea  $P$  el plano de ecuación  $ax + by + cz = 0$ , con  $c \neq 0$ . Demuestre que la curva sobre el plano  $\theta\phi$  cuya imagen mediante la parametrización es la intersección de  $S$  y  $P$  es la curva de ecuación:

$$\phi = \operatorname{arccot} \left( -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{c} \sin(\alpha + \theta) \right),$$

donde  $\alpha$  es el ángulo tal que  $\cos \alpha = b/\sqrt{a^2 + b^2}$  y  $\sin \alpha = a/\sqrt{a^2 + b^2}$ , cuando  $a \neq 0$  ó  $b \neq 0$ ; ó

$$\phi = \pi/2$$

si  $a = 0$  y  $b = 0$ .

14. Calcule

$$\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2} dA$$

donde  $D$  es la región acotada por las rectas  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{3}x$  y el círculo  $x^2 + y^2 = 9$ .

15. Sea

$$\vec{F}(x, y) = [\cos(x - 2y), -2 \cos(x - 2y)].$$

(a) Sea  $f(x, y) = \sin(x - 2y)$ . Calcule  $\nabla f(x, y)$ .

(b) Evalúe  $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$  para  $\sigma(t) = (\frac{\pi}{2}t, \frac{\pi}{2}t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

(c) Encuentre trayectorias  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  tales que:

i.  $\int_{\sigma_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -1$ ; y,

ii.  $\int_{\sigma_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 1$ .

16. Sea  $S$  es la parte del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  entre los planos  $z = 1$  y  $z = 3$ .

(a) Encuentre una parametrización de  $S$ .

(b) Calcule

$$\iint_S f dS$$

donde  $f(x, y, z) = x^2 z^2$ .