Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Calcule la integral
$$\int_0^1 \int_x^1 e^{x/y} dy dx.$$

2. Encuentre el volumen del sólido encerrado por el paraboloide $x = y^2 + z^2$ y el plano $x = 16$.

3. Sea S el sólido al interior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ y encima del cono $x^2 + y^2 = z^2$.
   (a) Plantee la integral que calcula el volumen de S.
   (b) Calcule el volumen de S.

4. Considere el tetrahedro acotado por los planos:
$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1,$$
   con densidad $\rho(x, y, z) = y$.
   a) Calcule la masa total del tetrahedro.
   b) Encuentre su centro de masa.

5. Calcule
$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right)^{3/2} dA$$
   donde D es la región acotada por las rectas $y = 0$, $y = \sqrt{3}x$ y el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

6. Calcule la integral
$$\int\int_R \frac{x - 2y}{3x - y} dx dy$$
   donde R es la región del plano acotada por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y = 4$, $3x - y = 1$, $3x - y = 8$.

7. a) Escriba la ecuación de la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$ en términos de u y v, donde $x = \sqrt{2}u - \sqrt{2/3}v$, $y = \sqrt{2}u + \sqrt{2/3}v$.
   b) Evalúe la integral $\iint_D f dA$ donde D es la región acotada por la elipse $x^2 - xy + y^2 = 2$, y $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$, usando las coordenadas u y v.

8. Evalúe la integral $\iint_D f dA$ donde D es la región en el primer cuadrante acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$, y $f(x, y) = \sin(9x^2 + 4y^2)$.

9. Calcule las siguientes integrales dobles:
   (a) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2} dx dy$.
   (b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \cos^2(1 - y) dy dx$
   (c) $\int\int_D e^{\frac{y-x}{y+x}} dA$, donde D es el tríangulo en el plano con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$ y $(0, 2)$ (*Ayuda*: use $u = x + y$, $v = x - y$).

10. Un alambre se dobla para que forme el cuarto de círculo $x^2 + y^2 = r^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, donde $r > 0$. Suponga que la densidad del alambre está dada por $\rho(x, y) = kxy$ donde $k > 0$.

(a) Encuentre una parametrización del alambre.

(b) Encuentre la masa total del alambre.

(c) Encuentre el centro de masa del alambre.

11. Sea

$$\vec{F}(x,y) = [\cos(x-2y), -2\cos(x-2y)].$$

(a) Sea $f(x,y) = \sin(x-2y)$. Calcule $\nabla f(x,y)$.

(b) Evalúe $\int_\sigma \vec{F}\cdot d\vec{s}$ para $\sigma(t) = (\frac{\pi}{2}t, \frac{\pi}{2}t)$, $0 \leq t \leq 1$.

(c) Encuentre trayectorias σ_1 y σ_2 tales que:

i. $\int_{\sigma_1} \vec{F}\cdot d\vec{s} = -1$; y,

ii. $\int_{\sigma_2} \vec{F}\cdot d\vec{s} = 1$.

12. Evalúe

$$\int_\sigma yzdx + xzdy + xydz,$$

con $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ donde σ_1 es el segmento de recta que une a $(1,0,0)$ con $(1,1,0)$ y σ_2 es el segmento de recta que une a $(1,1,0)$ con $(1,1,1)$.

13. Evalúe

$$\int_\sigma (2xy + e^{2y})dx + (x^2 + 2xe^{2y})dy,$$

donde σ es la curva correspondiente al cuarto de circulo que va de $(1,0)$ a $(0,1)$. (*Ayuda*: note que corresponde a una integral de linea sobre un campo gradiente)

14. Evalúe

$$\int_\sigma ydx + x^2dy,$$

donde σ es la trayectoria que recorre el triángulo con vértices en $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ en el sentido trigonométrico.

15. Considere la esfera $x^2+y^2+z^2 = 6$ y el cilindro $x^2+y^2 = 2$.

(a) Calcule el área de la superficie de la esfera que queda encerrada en el cilindro (*Ayuda*: use coordenadas cilíndricas).

(b) Calcule el volumen de la porción de la esfera que queda encerrada en el cilindro.

16. Sea S es la parte del cono $z^2 = x^2+y^2$ entre los planos $z=1$ y $z=3$.

(a) Encuentre una parametrización de S.

(b) Calcule

$$\iint_S f dS$$

donde $f(x,y,z) = x^2z^2$.

17. Sea S la superficie parametrizada por

$$\Phi(u,v) = (u-v, u+v, uv), \quad 0 \leq u^2+v^2 \leq 1.$$

Halle el área superficial de S.

18. Sea S la superficie sobre el plano $2x+5y+z = 10$ dentro del cilindro $x^2+y^2 = 9$.

(a) Encuentre una parametrización de S.

(b) Encuentre el área de S.

19. Evalúe

$$\iint_{(S,\vec{n})} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

donde $\vec{F}(x,y,z) = (xy, 4x^2, yz)$ y S es la gráfica de $f(x,y) = xe^y$ sobre el dominio $[0,1] \times [0,1]$ orientada por $\vec{n}$ apuntando hacia arriba.