

Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Encuentre el límite si existe, o explique por qué no existe.

(a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + y^2} \cos(y)$$

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$$

(c)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

(d)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + \sin^2(y)}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$$

2. Considere la superficie en \mathbb{R}^3

$$S : zy = \ln(x + y).$$

(a) Verifique que el punto $(0, 1, 0)$ está en S .

(b) Encuentre una parametrización de la recta normal a S en $(0, 1, 0)$.

(c) Encuentre una ecuación del plano tangente a S en $(0, 1, 0)$.

(d) Encuentre la aproximación lineal de la función

$$f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{y}$$

$$\text{en } (x, y) = (0, 1).$$

3. Encuentre una ecuación del plano tangente y una parametrización de la recta normal a la superficie dada en el punto indicado.

(a) $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$.

(b) $\sin(xyz) = x + 2y + 3z$, $(2, -1, 0)$.

4. Caracterice los puntos críticos de las siguientes funciones.

(a) $f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

(b) $f(x, y) = (x^2 + y)e^{y/2}$

5. Considere la función $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ y la región del plano D definida por las desigualdades

$$0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq 5.$$

(a) Encuentre los puntos críticos de $f(x, y)$ y caracterícelos como máximos locales, mínimos locales o puntos de silla.

(b) Encuentre los extremos de la función $f(x, y)$ sobre la frontera de D .

(c) Encuentre los máximos y mínimos absolutos de $f(x, y)$ en D .

6. Encuentre los puntos más cercanos al origen sobre la superficie $S : y^2 = 9 + xz$

7. Encuentre los máximos y mínimos de f bajo las restricciones dadas

(a) $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

(b) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, $x + y + z = 1$, $x - y + 2z = 2$.

8. Encuentre los valores extremos de $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}(x^2 + 2y^2)$ en el disco $x^2 + y^2 \leq 4$.