Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere los puntos $A(3,-1,2)$, $B(8,2,4)$, $C(-1,-2,-3)$ y $D(4,1,-1)$.
   a) Explique por qué el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.
   b) Encuentre el área del paralelogramo $ABCD$.
   c) Encuentre una ecuación del plano que contiene al paralelogramo $ABCD$.
   d) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por A perpendicular al plano que contiene $ABCD$.

2. Considere el plano de ecuación
$$3x + y + 2z = 6.$$
   a) Encuentre los puntos A, B y C de intersección de este plano con, respectivamente, los ejes x, y y z, y haga un dibujo del plano usando estos tres puntos.
   b) Calcule el área del triangulo ABC.

3. Encuentre una ecuación de la recta de intersección de los planos
$$2x - y - z = 5 \qquad \text{y} \qquad 4x + 3y - z = 5.$$
   Grafique los dos planos y su intersección en una misma gráfica.

4. Encuentre la función
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
   que calcula la distancia del punto (x,y,z) al plano $3x + 2y + 6z = 5$.

5. Determine si los siguientes límites existen, y en dado caso calcúlelo
   i)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$
   ii)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
   iii)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$$
   iv)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}.$$

6. Determine si la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   es continua en $(0,0)$.

7. Explique por qué el límite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+y^2}\cos(y)$$
   no existe.

8. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $(1, 2, -3)$.
9. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la gráfica de
$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$
en $x = 1$, $y = 2$.
10. Encuentre la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie de ecuación
$$xy = \ln(x + z)$$
en el punto $(0, 0, 1)$.
11. Encuentre la aproximación lineal de la función
$$f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{y}$$
en $(x, y) = (0, 1)$.
12. El capitán Ralph tiene dificultades cerca a Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x, y, z) estará dada por
$$T(x, y, x) = e^{-x^2-2y^2-3z^2},$$
donde x, y y z están medidas están medidas en metros. Actualmente él está en $(1, 1, 1)$.
   i) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?
   ii) Si la nave viaja a e^8 m/s, ¿con qué velocidad decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?
   iii) Desafortunadamente, el metal del casco se cuartera si se enfría a una tasa mayor que $\sqrt{14}e^{2o}$/s. Describir el conjunto de direcciones posibles en las que puede avanzar para bajar la temperatura a una tasa no mayor a que esa.
13. Considere las funciones $f(x, y) = (e^{x+y}, x^2y)$ y $g(u, v) = (\ln u, v^2 - \sin u)$.
   i) Escriba una fórmula para la función compuesta $f \circ g$.
   ii) Calcule, usando la regla de la cadena, $D(f \circ g)(\pi, 0)$.
14. Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos sillas.
   i) $f(x, y) = x \sin y$
   ii) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$.
15. Considere la función $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + 1$.
   i) Encuentre y clasifique los puntos críticos de f.
   ii) Encuentre los extremos de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$.
16. Considere la función
$$f(x, y) = xy.$$
   i) Determine para qué valor de t, la función f alcanza un valor máximal sobre la curva
$$r(t) = (\cos t, \sin t).$$
   Es decir, encuentre en qué valores de t la función $g(t) = f(r(t))$ alcanza un máximo.
   ii) Haga un dibujo de curvas de nivel de la función f y de la curva parametrizada por r.
   iii) Describa la posición relativa del gradiente de f y del tangente a la curva r en el punto que corresponde al valor t encontrado en i). Verifíque su conclusión en la gráfica hecha en ii).
17. Hallar el máximo y el mínimo $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$ y la región del plano D definida por las desigualdades
$$0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq 5.$$

18. Hallar el máximo y el mínimo de
$$f(x,y) = xy - y + x - 1$$
en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 2$. (*Ayuda*: $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$)

19. Hallar el máximo y el mínimo de
$$f(x,y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5$$
en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 16$.

20. Encuentre los puntos más cercanos al origen sobre la superficie $S : y^2 = 9 + xz$.

21. Encuentre los máximos de $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ bajo las restricciones $x + y + z = 1$ y $x - y + 2z = 2$.

22. Calcule la longitud de arco de la trayectoria
$$x(t) = e^t \cos t,\ y(t) = e^t \sin t,\ 0 \leq t \leq \pi.$$

23. Calcule la longitud de arco de la trayectoria
$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ z(t) = \ln(\cos t),\ 0 \leq t \leq \pi/3.$$