Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere los puntos $A(3,-1,2)$, $B(8,2,4)$, $C(-1,-2,-3)$ y $D(4,1,-1)$.
   a) Explique por qué el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.
   b) Encuentre el área del paralelogramo $ABCD$.
   c) Encuentre una ecuación del plano que contiene al paralelogramo $ABCD$.
   d) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por A perpendicular al plano que contiene $ABCD$.
2. Considere el plano de ecuación
$$3x + y + 2z = 6.$$
   a) Encuentre los puntos A, B y C de intersección de este plano con, respectivamente, los ejes x, y y z, y haga un dibujo del plano usando estos tres puntos.
   b) Calcule el área del triangulo ABC.
3. Encuentre una ecuación de la recta de intersección de los planos
$$2x - y - z = 5 \qquad \text{y} \qquad 4x + 3y - z = 5.$$
   Grafique los dos planos y su intersección en una misma gráfica.
4. Encuentre la función
$$f : \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}$$
   que calcula la distancia del punto (x,y,z) al plano $3x + 2y + 6z = 5$.
5. Determine si los siguientes límites existen, y en dado caso calcúlelo
   i)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$$
   ii)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
   iii)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}.$$
6. Determine si la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   es continua en $(0,0)$.
7. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $(1,2,-3)$.
8. Encuentre una ecuación para el plano tangente a la gráfica de
$$f(x,y) = \frac{e^x}{x^2+y^2}$$
   en $x = 1$, $y = 2$.

9. Encuentre la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie de ecuación

$$xy = \ln(x + z)$$

en el punto $(0, 0, 1)$.

10. Encuentre la aproximación lineal de la función

$$f(x, y) = \frac{\ln(x + y)}{y}$$

en $(x, y) = (0, 1)$.

11. El capitán Ralph tiene dificultades cerca a Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x, y, z) estará dada por

$$T(x, y, x) = e^{-x^2-2y^2-3z^2},$$

donde x, y y z están medidas están medidas en metros. Actualmente él está en $(1, 1, 1)$.

   i) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?
   ii) Si la nave viaja a e^8 m/s, ¿con qué velocidad decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?
   iii) Desafortunadamente, el metal del casco se cuartera si se enfría a una tasa mayor que $\sqrt{14}e^{2o}$/s. Describir el conjunto de direcciones posibles en las que puede avanzar para bajar la temperatura a una tasa no mayor a que esa.

12. Considere las funciones $f(x, y) = (e^{x+y}, x^2y)$ y $g(u, v) = (\ln u, v^2 - \sin u)$.

   i) Escriba una fórmula para la función compuesta $f \circ g$.
   ii) Calcule, usando la regla de la cadena, $D(f \circ g)(\pi, 0)$.

13. Calcule la longitud de arco de la trayectoria

$$x(t) = e^t \cos t,\ \ y(t) = e^t \sin t,\ \ 0 \leq t \leq \pi.$$

14. Hallar los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar cuáles son máximos locales, mínimos locales o puntos sillas.

   i) $f(x, y) = x \sin y$
   ii) $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$.

15. Considere la función $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}y^4 + 1$.

   i) Encuentre y clasifique los puntos críticos de f.
   ii) Encuentre los extremos de f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 2$.

16. Considere la función

$$f(x, y) = xy.$$

   i) Determine para qué valor de t, la función f alcanza un valor máximal sobre la curva

$$r(t) = (\cos t, \sin t).$$

   Es decir, encuentre en qué valores de t la función $g(t) = f(r(t))$ alcanza un máximo.
   ii) Haga un dibujo de curvas de nivel de la función f y de la curva parametrizada por r.
   iii) Describa la posición relativa del gradiente de f y del tangente a la curva r en el punto que corresponde al valor t encontrado en i). Verifíque su conclusión en la gráfica hecha en ii).

17. Hallar el máximo y el mínimo de

$$f(x, y) = xy - y + x - 1$$

en el conjunto $x^2 + y^2 \leq 2$. (*Ayuda*: $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$)

18. Encuentre los máximos de $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ bajo las restricciones $x + y + z = 1$ y $x - y + 2z = 2$.