Cálculo Vectorial - Taller

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Considere los puntos $A(3,-1,2)$, $B(8,2,4)$, $C(-1,-2,-3)$ y $D(4,1,-1)$.
   a) Explique por qué el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.
   b) Encuentre el área del paralelogramo $ABCD$.
   c) Encuentre una ecuación del plano que contiene al paralelogramo $ABCD$.
   d) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por A perpendicular al plano que contiene $ABCD$.

2. Considere el plano de ecuación
$$3x + y + 2z = 6.$$
   a) Encuentre los puntos A, B y C de intersección de este plano con, respectivamente, los ejes x, y y z, y haga un dibujo del plano usando estos tres puntos.
   b) Calcule el área del triangulo ABC.

3. Encuentre una ecuación de la recta de intersección de los planos
$$2x - y - z = 5 \qquad \text{y} \qquad 4x + 3y - z = 5.$$
   Grafique los dos planos y su intersección en una misma gráfica.

4. Encuentre la función
$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
   que calcula la distancia del punto (x,y,z) al plano $3x + 2y + 6z = 5$.

5. Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^3 + y^3 - 6xy$ en el punto $(1,2,-3)$.

6. Encuentre la ecuación de la recta normal y del plano tangente a la superficie de ecuación
$$xy = \ln(x+z)$$
   en el punto $(0,0,1)$.

7. El capitán Ralph tiene dificultades cerca a Mercurio. La temperatura del casco de la nave, cuando él está en la posición (x,y,z) estará dada por
$$T(x,y,x) = e^{-x^2-2y^2-3z^2},$$
   donde x, y y z están medidas están medidas en metros. Actualmente él está en $(1,1,1)$.
   i) ¿En qué dirección deberá avanzar para disminuir más rápido la temperatura?
   ii) Si la nave viaja a e^8 m/s, ¿con qué velocidad decrecerá la temperatura si avanza en esa dirección?
   iii) Desafortunadamente, el metal del casco se cuartera si se enfría a una tasa mayor que $\sqrt{14}e^{2o}$/s. Describir el conjunto de direcciones posibles en las que puede avanzar para bajar la temperatura a una tasa no mayor a que esa.

8. Considere la función
$$f(x,y) = xy.$$
   i) Determine para qué valor de t, la función f alcanza un valor máximal sobre la curva
$$r(t) = (\cos t, \sin t).$$
   Es decir, encuentre en qué valores de t la función $g(t) = f(r(t))$ alcanza un máximo.
   ii) Haga un dibujo de curvas de nivel de la función f y de la curva parametrizada por r.
   iii) Describa la posición relativa del gradiente de f y del tangente a la curva r en el punto que corresponde al valor t encontrado en i). Verifíque su conclusión en la gráfica hecha en ii).