

Álgebra Lineal 2 - Taller 9

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

1. Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión n . Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $\{\lambda^1, \dots, \lambda^n\}$ la base dual.

- (a) Suponga que $n = 3$, describa una base de $T^{(0,2)}(V)$ y exprese

$$\begin{aligned} T : V \times V &\longrightarrow K \\ (a^i v_i, b^i v_i) &\longmapsto a^1 b^3 + a^2 b^1 + a^3 b^2 \end{aligned}$$

como combinación lineal de elementos de esa base.

- (b) Suponga que $n = 2$.

- i. Sea $F \in T^{(1,1)}(V)$

$$F = (3\lambda^1 - 4\lambda^2) \otimes v_1 + (4\lambda^1 + 3\lambda^2) \otimes v_2$$

Encuentre un operador f de V tal que para todo $v \in V$, $f(v) = F(v)$, donde $F(v)$ es la contracción de F por v , este último visto como elemento en $T^{(1,0)}(V)$.

- ii. Sea f^* el operador dual del operador f del punto anterior. Encuentre $F^* \in T^{(1,1)}(V)$ tal que para todo $\lambda \in V^*$, $f^*(\lambda) = F^*(\lambda)$, donde $F^*(\lambda)$ es la contracción de F^* por λ , este último visto como elemento en $T^{(0,1)}(V)$.

2. Sea K un cuerpo y $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Sea e_1, \dots, e_n la base canónica de K^n y (e^1, \dots, e^n) la base dual. Sea $a_{ij} \in K$, para $i, j = 1, \dots, n$ y $s \in T^{(0,2)}(K^n)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

- (a) Describa una base de $T^{(0,2)}(K^n)$ y exprese s como combinación lineal de elementos de esa base.

- (b) Sea

$$\begin{aligned} s^* : K^n &\longrightarrow (K^n)^* \\ v &\longmapsto \{s^*(v) : w \rightarrow s(v, w)\} \end{aligned}$$

Encuentre $S \in T^{(0,2)}(K^n)$ tal que $s^*(v) = S(v)$, donde $S(v)$ es la contracción de S por v , este visto como elemento en $T^{(1,0)}(K^n)$.

Notación En los puntos 3. y 4. Vvemos a denotar al tensor $S \in T^{(0,2)}(K^n)$ por s .

3. Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de \mathbb{R}^3 y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

- (a) Encuentre los valores propios de A .

- (b) Demuestre que s define un producto interno en \mathbb{R}^3 .

- (c) Encuentre una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de A .

- (d) A partir de los vectores propios encontrado, encuentre una base (E_1, E_2, E_3) ortogonal respecto al producto interno s .

- (e) Sea (E^1, E^2, E^3) la base dual (E_1, E_2, E_3) , escriba s como una combinación lineal de los elementos de la base $\{E^i \otimes E^j\}$.

4. Sea (e_1, e_2, e_3) la base canónica de \mathbb{R}^3 y (e^1, e^2, e^3) la base dual. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

y $s \in T^{(0,2)}(\mathbb{R}^3)$ definida por

$$s(x^i e_i, y^j e_j) = a_{ij} x^i y^j.$$

- Encuentre los valores propios de A .
- Encuentre una base (f_1, f_2, f_3) de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de A .
- Sea (f^1, f^2, f^3) la base dual (f_1, f_2, f_3) , escriba s como una combinación lineal de los elementos de la base $f^i \otimes f^j$.
- Encuentre una base (E^1, E^2, E^3) tal que si (E_1, E_2, E_3) es la base dual, entonces

$$s = E^1 \otimes E^1 + E^2 \otimes E^2 - E^3 \otimes E^3$$

Observación: Si quiere puede demostrar que si s es una forma bilineal simétrica sobre \mathbb{R}^n entonces existe una base (E_1, \dots, E_n) tal que

$$s = \sum_i \varepsilon_i E^i \otimes E^i$$

con $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$ (ver “ley de inercia de Sylvester”). En tal caso $s(E_i) = \varepsilon_i E^i$. Cuando $\varepsilon_i = 1$ para todo i tenemos que s es un producto interno y se dice vulgarmente que s “sube los índices”, pues $s(E_i) = E^i$.