Taller
MATE 1107

Sea K un cuerpo y V un espacio vectorial sobre K de dimensión finita mayor a 0. Denote $n = \dim(V)$. Sea f un operador en V, es decir $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$.

Definición: Decimos que f es *simple* si los únicos espacios invariantes bajo f son $\{0\}$ y V. Decimos que f es *semi-simple* si para todo $V_1 \leq V$ invariante bajo f existe $V_2 \leq V$ invariante bajo f tal que $V = V_1 \oplus V_2$.

Definición: El *polinomio minimal* de f, $P_{f,\min}(t) \in K[t]$ es el polinomio mónico no nulo de menor grado tal que $P_{f,\min}(f) = 0$.

- Demuestre que el polinomio minimal divide al polinomio característico. (*Ayuda*: usando el algoritmo de la división, divida el polinomio caracteristico por el polinomio minimal para obtener un residuo y verifique que este es igual a cero.)

- Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K^2)$ por
$$f(x, y) = (\lambda x + y, \lambda y).$$
Verifique que f no es semi-simple. Encuentre el polinomio minimal de f.

- Sea $\lambda \in K$ y defina $f \in \mathrm{Hom}_K(K^2, K^2)$ por
$$f(x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$
Encuentre el polinomio minimal de f. Verifique que f es semi-simple.

- Considere los operadores $g, h \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ definidos por
$$\begin{aligned} g(x,y,z,w) &= (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}w, \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}w) \\ h(x,y,z,w) &= (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}z, \frac{\sqrt{3}}{2}y + z - \frac{1}{2}w, \frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z, -\frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}w), \end{aligned}$$
y los operadores $g_{\mathbb{C}}, h_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ dadas por las mismas fórmulas.

  1. Verifique que g y h no tiene valores propios y que los valores propios de $g_{\mathbb{C}}$ y $h_{\mathbb{C}}$ son $\lambda = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$ y $\bar{\lambda} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i)$.
  2. Verifique que si $u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}^4$, es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ (resp. de $h_{\mathbb{C}}$) asociado a λ, entonces $u - iv$ es un vector propio de $g_{\mathbb{C}}$ (resp. de $h_{\mathbb{C}}$) asociado a $\bar{\lambda}$.
  3. Encuentre una base de Jordan para $g_{\mathbb{C}}$ y para $h_{\mathbb{C}}$ de la forma $T = \{u_1 + iv_1, u_2 + iv_2, u_1 - iv_1, u_2 - iv_2\}$.

4. Usando la notación de los vectores en el numeral anterior, encuentre la representación matricial de g y h relativas a la base $S = \{u_1, -v_1, u_2, -v_2\}$. (*Ayuda*: Por bloques 2×2 estas se deben ver

$$\Big[f\Big]_S^S = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \quad \Big[g\Big]_S^S = \begin{bmatrix} R & I \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

donde R es una matriz de rotación e I es la matriz identidad.)
5. Encuentre los polinomios minimales de g y h.

- Suponga que f es semi-simple y sea $V_1 \leq V$ un subespacio invariante bajo f. Demuestre que la restricción de f a V_1, $f_1 \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_1)$, es semi-simple.

- Suponga que f es semi-simple, demuestre que existe una descomposición

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$$

tal que, para $i = 1, \ldots, r$, V_i es invariante bajo f y la restricción de este a V_i, $f_i \in \mathrm{Hom}_K(V_i, V_i)$, es simple. (*Ayuda*: Use inducción fuerte en $n = \dim_K(V)$, es decir asuma que el resultado es cierto para todo operador en un espacio de dimensión estrictamente menor que n y use el punto anterior).

- Demuestre que el polinomio minimal de un operador semi-simple es un producto de polinomios irreducibles ninguno de ellos repetido (es decir, elevados únicamente a la primera potencia; es decir, sin cuadrados que lo dividan) usando los siguientes pasos:

1. Usando la descomposición del punto anterior, demuestre que el polinomio minimal de f_i divide al polinomio minimal de f. (*Ayuda*: divida el polinomio minimal de f por el de f_i y evalue el residuo en f_i, demuestre que es cero.)
2. Demuestre que el mínimo común multiplo de los polinimios minimales de $f_1, \ldots, f_r$ es el polinomio minimal de f. (*Ayuda*: Sea $P(t)$ este mínimo común multiplo, dado $v \in V$, tome $v_i \in V_i$, $i = 1, \ldots, r$, tales que $v = v_1 + \ldots + v_r$, demuestre que $P(f)(v) = P(f)(v_1) + \ldots + P(f)(v_r) = 0 + \ldots + 0 = 0$.)
3. Concluya. (*Ayuda*: El polinomio minimal de un operador simple es irreducible.)

- Identifique entre los operadores f y g de R^4 ya definidos, cual es semi-simple y cual no lo es. Justifique su respuesta.

Observación: Bajo ciertas hipótesis sobre el cuerpo K el converso del resultado obtenido también es cierto: Si el polinomio minimal de un operador no lo divide ningún cuadrado, entonces el operador es semi-simple. El estudio de tal hipótesis, explicitamente ser cuerpo *perfecto*, sobrepasa el contenido del curso.