Álgebra Lineal 2 - Taller 5

Universidad de los Andes - Departamento de Matemáticas

Para cada uno de los siguientes operadores $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$, $V = K^d$:

i) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (-3x - y + 5w, -x - 2y + z + 4w, 4x + y + z - 5w, -2x - y + 4w),$$

ii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (-3x - y + 5w, -x - 2y + z + 4w, 4x + y + z - 5w, -2x - y + 4w),$$

iii) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (2x - 2y + z - w, y + z, 3x - 4y + z - 3w, -x + 2z),$$

iv) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4, \mathbb{C}^4)$ donde

$$f(x, y, z, w) = (2x - 2y + z - w, y + z, 3x - 4y + z - 3w, -x + 2z),$$

1. Encuentre la representación matricial de f en la base canónica.
2. Encuentre la factorización del polinomio característico $P_f(t)$ como producto de potencias de polinomios irreducibles de $K[t]$:
$$P_f(t) = \prod_{i=1}^{n} P_i(t)^{r_i}$$
donde cada $P_i(t) \in \mathbb{K}[t]$ es irreducible.
3. Sean $V_i = \ker\left(P_i(f)^{r_i}\right)$, $i = 1, \ldots, n$, y $p_1, \ldots, p_n$ las proyecciones sobre $V_1, \ldots, V_n$ respecto a la descomposición $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Encuentre polinomios $\Pi_1(t), \ldots, \Pi_n(t) \in K[t]$ tales que $\Pi_i(f) = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.
4. Encuentre una base de V respecto a la cual la representación matricial de f es diagonal por bloques de tamaño $\dim(V_i)$, $i = 1, \ldots, n$, y cada bloque corresponde a una representación matricial de $f\restriction_{V_i}$.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para calcular su polinomio característico en la variable t y su factorización ejecutamos:

```
sage: t=PolynomialRing(QQ, 't').gen()
sage: A=Matrix(QQ,[[-1,-2],[-1,1]])
sage: P=A.charpoly('t')
sage: factor(P)
```

Vemos que $P_A(t) = t^2 - 3$. Para factorizarlo en los reales (donde $P_A(t) = (t - \sqrt{3})(t + \sqrt{3})$) debemos agregarle en Sage $\sqrt{3}$ a nuestro cuerpo $\mathbb{Q}$. Para ello ejecutamos:

```
sage: K.<r> = QQ.extension(P)
```

Esto le agrega la raíz de $P_A(t)$ a nuestro cuerpo. El nuevo cuerpo se llama K y en él r denota $\sqrt{3}$. Para factorizarlo debemos explicarle a Sage que ahora vamos a trabajar en K en vez de $\mathbb{Q}$.

```
sage: P=P.change_ring(K)
sage: factor(P)
```

Tenemos dos subespacios invariantes $V_1 = \ker(A - \sqrt{3}I_2)$ y $V_2 = \ker(A + \sqrt{3}I_2)$. Para obtener los polinomios $\Pi_1(t), \Pi_2(t) \in \mathbb{R}[t]$ tales que, para $i = 1, 2$, $\Pi_i(A)$ sea la proyección p_i sobre V_i de acuerdo a la descomposición $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, ejecutamos

```
sage: P1=(t - r)
sage: P2=(t + r)
sage: P12,Q1,Q2=xgcd(P1,P2)
sage: Pi1=Q2*P2
sage: Pi2=Q1*P1
```

Las dos matrices de proyección $\Pi_i(A)$, $i = 1, 2$, las calculamos ejecutando:

```
sage: Pr1=Pi1(A)
sage: Pr2=Pi2(A)
```

El espacio $V_1 = \text{im}(p_1)$ está generado por $v_1 = (-\sqrt{3}+3, -\sqrt{3})$ y $V_2 = \text{im}(p_1)$ está generado por $v_2 = (\sqrt{3}+3, \sqrt{3})$. Hacemos un cambio de base para ver la representación matricial de $f(x, y) = (-x - 2y, -x + y)$ en la base $\{v_1, v_2\}$:

```
sage: v1=vector(K,[-r+3,-r])
sage: v2=vector(K,[r+3,r])
sage: C=column_matrix([v1,v2])
sage: B=C^(-1)*A*C
```

Note que si trabajamos directamente sobre los reales en Sage, en vez de pedirle que use el símbolo r para $\sqrt{3}$, tomará valores aproximados para $\sqrt{3}$. Esto lo puede verificar ejecutando

```
sage: t=PolynomialRing(RR, 't').gen()
sage: A=Matrix(RR,[[-1,-2],[-1,1]])
sage: P=A.charpoly('t')
sage: factor(P)
```

Para la pregunta iv) lo mejor es trabajar con $K = \mathbb{Q}[i]$ esto se logra definiendo K por

```
sage: K.<i> = QQ.extension(t^2+1)
```

Si usted trabaja directamente sobre los complejos, como con los reales, Sage tomará aproximaciones en la parte real y la parte compleja.

Solución

i) 1. Sea $\mathcal{C}$ la base canónica. La representación matricial de f en la base $\mathcal{C}$ es

$$[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 & -5 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

ii) El polinomio característico de f es

$$P_f(t) = (t-1)(t+1)(t^2-2)$$

iii) Sean $R_1(t) = (t+1)(t^2-2)$, $R_2(t) = (t-1)(t^2-2)$ y $R_3(t) = (t-1)(t+1)$, entonces

$$\frac{1}{2}R_1(t) + \frac{-1}{2}R_2(t) = t^2 - 2$$

y

$$-(t^2-2) + R_3(t) = 1$$

así

$$\frac{-1}{2}R_1(t) + \frac{1}{2}R_2(t) + R_3(t) = 1.$$

Para

$$\begin{aligned} \Pi_1(t) &= \frac{-1}{2}R_1(t) \\ \Pi_2(t) &= \frac{1}{2}R_2(t) \\ \Pi_3(t) &= R_3(t) \end{aligned}$$

tenemos que $p_1 = \Pi_1(f)$, $p_2 = \Pi_2(f)$ y $p_3 = \Pi_3(t)$ son respectivamente las proyecciones sobre V_1, V_2 y $V3$ respecto a la descomposición $V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$, donde

$$\begin{aligned} V_1 &= \ker(f - \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}) \\ V_2 &= \ker(f + \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}) \\ V_3 &= \ker(f^2 - 2\mathrm{id}_{\mathbb{Q}^4}) \end{aligned}$$

iv) Tenemos

$$\begin{aligned} [p_1]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_1(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\ &= \Pi_1\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ [p_2]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_2(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\ &= \Pi_2\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [p_3]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} &= [\Pi_3(f)]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \\ &= \Pi_3\left([f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

entonces $V_1 = \mathrm{im}(p_1) = \langle v_1 \rangle$, $V_2 = \mathrm{im}(p_2) = \langle v_2 \rangle$, y $V_3 = \mathrm{im}(p_3) = \langle v_3, v_4 \rangle$ con

$$\begin{aligned}
v_1 &= (1, 1, 0, 1) \\
v_2 &= (1, -2, -1, 0) \\
v_3 &= (-1, 1, 1, -1) \\
v_4 &= (0, 1, 0, 0).
\end{aligned}$$

Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ entonces

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -7 & -3 \end{bmatrix}.$$